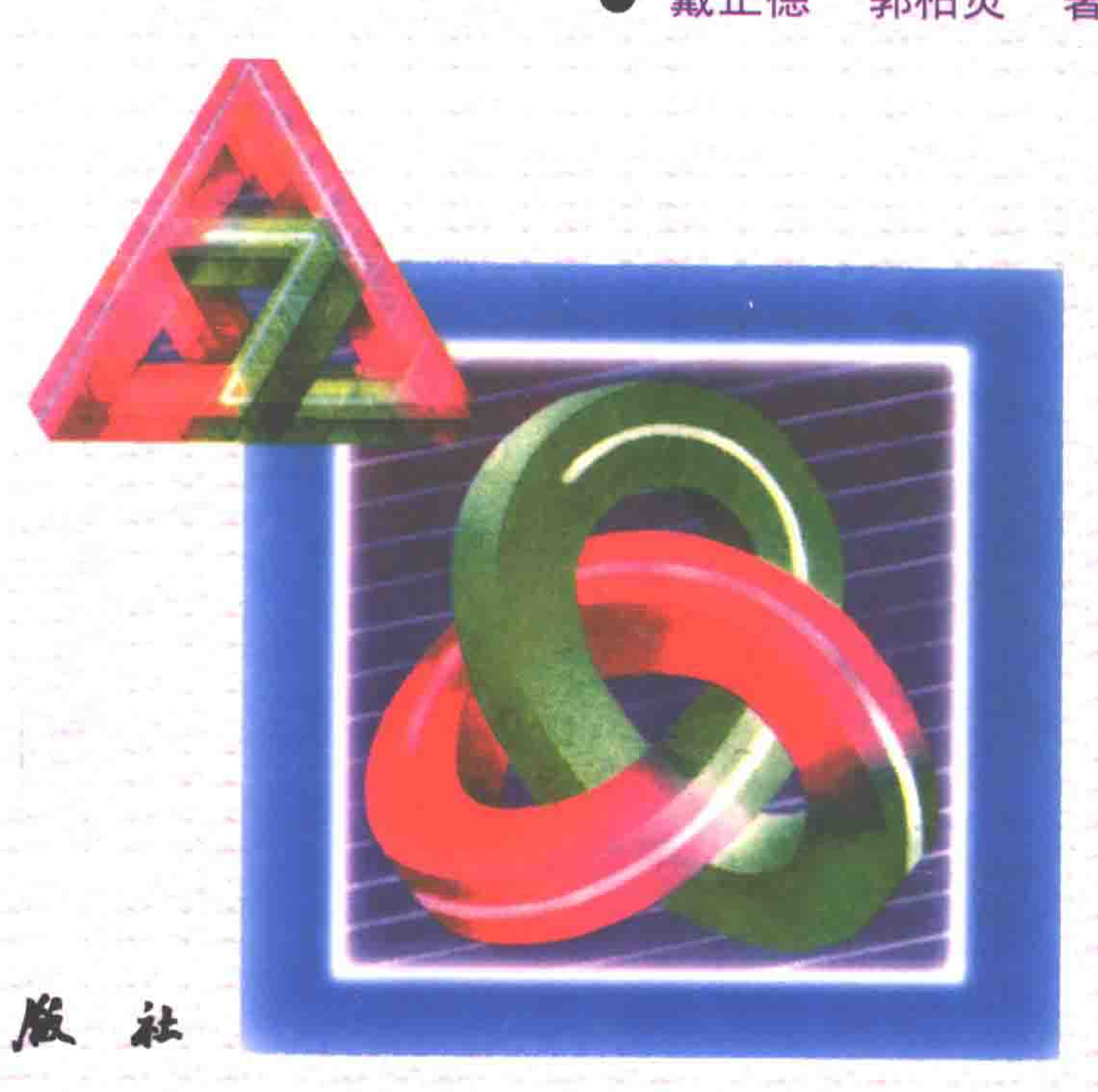
现代数学基础丛书

惯性流形与近似惯性流形

● 戴正德　郭柏灵　著



科学出版社

内容简介

本书主要介绍惯性流形与近似惯性流形的基本概念、研究方法和最新研究成果，内容包括惯性流形的存在性、构造和稳定性；近似惯性流形的构造、存在性、收敛性和 Gevrey 逼近；非线性 Galerkin 方法，非线性有限元逼近；惯性集的构造，正则吸引子结构，吸引子的分形局部化和分形结构.

本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，以及供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

惯性流形与近似惯性流形/戴正德，郭柏灵著.-北京：科学出版社，2000.1
(现代数学基础丛书)
ISBN 7-03-007596-X

Ⅰ.惯… Ⅱ.①戴… ②郭… Ⅲ.流形分析 Ⅳ.019

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 19306 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

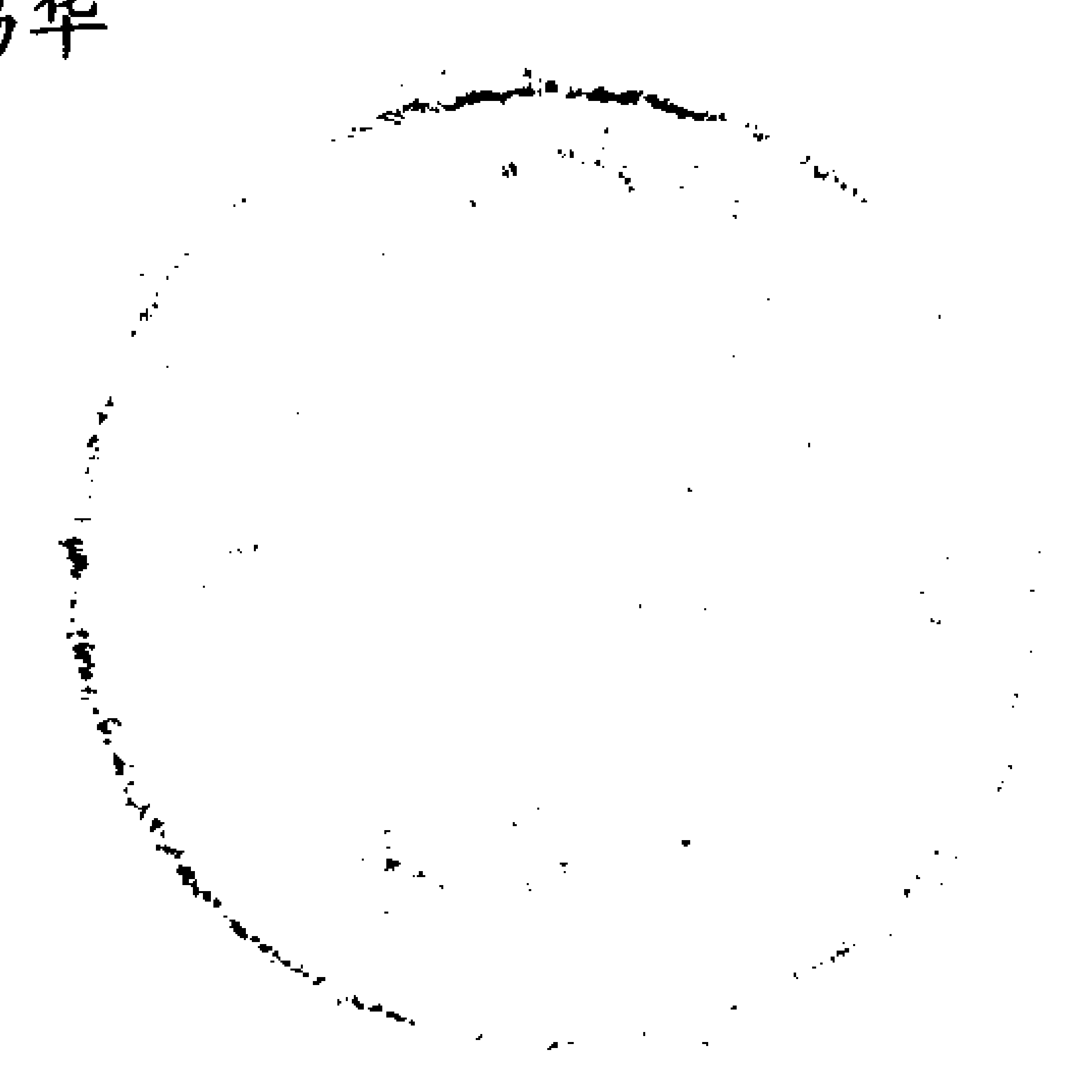
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年1月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2000年1月第一次印刷 印张：8 3/8
印数：1—1 800 字数：217 000

定价：19.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)



引　言

近 10 多年来，有限维动力系统的问题、思想以及部分性质已深深地渗透到无穷维动力系统和偏微分方程的理论之中. 许多国内外学者已对数学物理发展方程描述的动力系统理论进行了研究，这些方程有 Navier-Stokes 方程、非线性 Schrödinger 方程，KdV 方程，铁磁链方程，Ginzburg-Landau 方程，反应扩散方程、阻尼半线性波方程等等. 由于许多科学家的努力，在适当的泛函空间已获得 Navier-Stokes 方程的整体吸引子. 即当 $t\to+\infty$时吸引 Navier-Stokes 系统所有有界集上出发的轨道的紧致连通集，且在 Hausdorff 意义下是紧的有限维集，维度的上、下界估计也已获得. Navier-Stokes 方程的上述结果刺激了对其他数学物理方程吸引子的研究. 数学家们已建立了吸引子存在性、基本性质、吸引子的局部化和流形逼近等一系列理论. 特别在最近几年围绕吸引子结构和方程解的长时间动力学性态研究，人们相继发现了惯性流形，即内含吸引子、指数地吸引解的轨道且在其上无穷维系统约化为有限维动力系统的有限维正不变 Lipschitz 流形. 发现了惯性形式、指数吸引子、决定结以及近似惯性流形等等；与此同时，在数值逼近研究领域，发展了线性 Galerkin 方法，建立了非线性 Galerkin 逼近以及其与有限元、有限差分相互交叉结合的其他逼近模式. 在此期间，对弱耗散发展方程定义的无穷维动力系统吸引子及相关问题也获得比较丰富的结果. 所有这些成果，对逐步揭示由非线性发展方程所刻划的非线性现象发生机理和内在规律有重要意义. 随着研究工作的展开，我国数学物理工作者也做了大量有成效的工作.

本书致力于无穷维动力系统惯性流形以及与之相关的一些课题，书中涉及到的内容，绝大多数是近几年取得的研究成果.

我们研究一类非线性发展方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + R(u) = 0 \tag{1}$$

其中 A 在某一 Hilbert 空间 H 上是线性、自共轭无界算子，R 是非线性算子. 令 $S(t)$是由(1)及其初值问题确定的非线性算子半群，$S(t): u_0 \to u(t)$，记 P 是H 中具有有限维值域的正交投影，$Q = I - P$，记 $p = Pu, q = Qu$；假设(1)在 H 中存在有界吸收集，于是在引进截断函数 θ，且将(1)分解后，(1)的解的长时间性态等价于下面两个方程解的性态：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Ap + PF(u) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Aq + QF(u) = 0 \tag{3}$$

其中 $F = \theta R(u)$. 假设 F 是定义在R 上取值于H 的有界连续函数，则(3)有唯一解，当 $t \to -\infty$时保持有界，于是

$$q(t) = \mathrm{e}^{-(t-s)AQ}q(s) - \int_s^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)AQ}QF(u)\mathrm{d}\tau$$

令 $s \to -\infty$，有

$$q(t) = -\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-\tau)AQ}QF(u(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

特别，

$$q(0) = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\tau AQ}QF(u(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad u(\tau) = p(\tau) + q(\tau) \tag{5}$$

假设 Lipschitz 函数 $\phi: PD(A) \to QD(A)$，其中 $D(A)$为 A 的定义域，$u(t) = p(t) + \phi(p(t))$，于是

$$q(0) = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\tau AQ}QF(p(\tau) + \phi(p(\tau)))\mathrm{d}\tau$$

若 $p(\tau) = p(\tau, \phi, p_0)$是(2)中 $u = p + \phi(p)$时以 p_0 为始值的解，定义映射 $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T}\phi(p_0) = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\tau AQ}QF(p(\tau) + \phi(p(\tau)))\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

换 p_0 为 $p(t)$，注意到 $p(\tau, \phi, p(t)) = p(t+\tau, \phi, p_0)$，于是

$$\mathscr{T}\phi(p(t)) = -\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)AQ}QF(p(\tau)+\phi(p(\tau)))d\tau \quad (7)$$

可以证明,若算子 A 的谱满足"谱间隙"条件,则(7)中的映射 $\mathscr{T}$ 对一类函数空间 $\mathscr{T}_{b,l}$ 存在不动点 ϕ,即有

$$\phi(p) = -\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)AQ}QF(p(\tau)+\phi(p(\tau)))d\tau \quad (8)$$

令 $\mu=\mathrm{graph}\phi$,则 μ 满足如下条件:

(i) $S(t)\mu\subseteq\mu,\ \forall\, t\geqslant 0$;

(ii) μ 是有限维 Lipschitz 流形;

(iii) μ 指数地吸引(1)中所有解的轨线. 我们称 μ 为(1)的惯性流形. 显然在 μ 上(1)约化为(2),其中 $u=p+\phi(p)$,而(2)则是有限维常微动力系统. 称为(1)的惯性形式.

这就产生了一系列课题:

是否对具有吸引子的所有数学物理发展方程都存在惯性流形?

如果谱间隙条件不满足,能否用其他流形或具有一定特征的集合逼近吸引子?

什么情况下,可以用其他流形逼近惯性流形,而且以 C^0, C^1 拓扑收敛到惯性流形? 即所谓近似惯性流形的构造问题.

近似惯性流形,惯性流形的显式表示及数值逼近问题.

算子 A 非自共轭情形.

等等.

本书围绕上述问题,对(1)的惯性流形,近似惯性流形,数值逼近模式,近似惯性流形的收敛性,吸引子的逼近等进行了较为系统的研究. 书中总结了 1988 年以来在无穷维动力系统的上述研究领域的许多重要成果,其中有不少是作者及国内学者取得的.

第一章,惯性流形. 研究了方程(1)在"谱间隙"条件下,算子半群 $S(t)$ 的强收缩性和锥不变性,基于锥不变性,运用压缩映像原理导出惯性流形存在性,研究了惯性流形的构造及其稳定性. 对算子 A 是非自共轭的情形也做了研究.

第二章,我们从惯性流形的逼近流形开始给出了近似惯性流形几种不同的构造方法和技巧,同时研究了解的 Gevrey 类正则性和指数逼近的近似惯性流形,对非自共轭弱耗散、非自治情形也获得近似惯性流形的一些结果.

第三章,我们研究了非线性 Galerkin 逼近模式,非线性 Galerkin 有限元,非线性 Galerkin 有限差分逼近模式.DT 逼近和近似惯性流形族的构造是近几年来最好的研究成果之一.

第四章研究了近似惯性流形的收敛性,DT 逼近的收敛性,近似惯性流形的 C^0,C^1 收敛性,一些收敛性结果是比较深刻的.

最后一章,第五章对(1)的指数吸引子进行了研究,研究发现,几乎所有具有吸引子的数学物理发展方程,都具有指数吸引子,即惯性分形集.研究了离散和连续动力系统的指数吸引子,弱耗散发展方程的指数吸引子,有界和无界域上(1)的指数吸引子,并对几类数学物理发展方程吸引子的分形结构进行了描述,同时给出吸引子的分形局部化逼近序列.

书后参考文献仅就最主要的列出,在每章序言中都给出了最主要的参考文献目录.

本书力求比较系统地总结近 10 年来在无穷维动力系统惯性流形以及吸引子相关领域的主要成果,对于动力系统研究领域、非线性发展方程研究领域和从事无穷维动力系统研究的高校教师、研究人员,科研院所相关研究人员,都可以不困难地通读全书内容,并会从中发现尚未解决的许多研究课题.

近 10 年来,在无穷维动力系统研究领域取得大量的研究成果,由于时间和篇幅所限,一些重要的成果可能未能述及,书中也可能有不妥之处,请读者鉴谅和指正.

本书得到中国科学院科学出版基金资助,在编写过程中得到国内外学者的支持和帮助,科学出版社吕虹同志付出了艰辛的劳动,我们在此一并表示诚挚的谢意.

作者

1998 年 5 月

目　　录

第一章　惯性流形 …………………………………………… 1

§1　一类非线性演化方程的惯性流形………………… 1

§2　惯性流形研究的新进展………………………… 22

第二章　近似惯性流形(AIM) ………………………… 35

§1　惯性流形的逼近流形………………………… 35

§2　AIM 构造(Ⅰ) …………………………………… 45

§3　AIM 构造(Ⅱ) …………………………………… 62

§4　Gevrey 类正则性和指数逼近的 AIM …………… 79

§5　非自共轭情形弱耗散方程的 AIM ……………… 93

§6　非自治系统 AIM 的构造 ……………………… 101

第三章　数值逼近 …………………………………………… 109

§1　非线性 Galerkin 逼近模式……………………… 109

§2　Galerkin 有限差分逼近 ………………………… 119

§3　Galerkin 有限元逼近 …………………………… 132

§4　DT 逼近格式和 AIM 的构造 …………………… 147

第四章　AIM 的收敛性 …………………………………… 161

§1　DT 逼近模式下 AIM 的收敛性 ………………… 161

§2　强收缩性和锥不变性…………………………… 171

§3　AIM 的 C^0 收敛性………………………………… 179

§4　AIM 的 C^1 收敛性………………………………… 186

第五章　指数吸引子与吸引子结构初步 ……………… 193

§1　离散动力系统 IFS ……………………………… 193

§2　连续动力系统 IFS ……………………………… 204

§3　NS 方程的 IFS ………………………………… 210

§4　无界域上耗散发展方程 IFS …………………… 216

§5 弱耗散发展方程 IFS …………………………… 226
§6 吸引子分形结构初步…………………………… 243
参考文献 ………………………………………… 250

第一章　惯性流形

本章首先给出惯性流形的定义，证明了在“谱间隙”条件下，惯性流形存在性定理，在第二节介绍了惯性流形研究领域的新进展，本章主要参考文献见[1]～[35].

§1　一类非线性演化方程的惯性流形

在 Hilbert 空间 H 上给定内积 $(\cdot,\cdot)$，非线性演化方程具有形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+R(u)=0 \tag{1.1}$$

其中

$$R(u)=B(u,u)+Cu-f \tag{1.2}$$

A 是 H 上线性无界自共轭算子，$D(A)$ 在 H 中稠. 设 A 是正的，即

$$(Av,v)>0,\ \forall\, v\in D(A),\ v\neq 0$$

A^{-1} 是紧的，映射 $u\to Au$ 是从 $D(A)$ 到 H 的同构. A^s 表示 A 的 s 次幂. 空间 $V_{2s}(s\in\mathbb{R})(V_{2s}=D(A^s))$ 是 Hilbert 空间，具有内积：

$$(u,v)_{2s}=(A^su,A^sv),\ \forall\, u,v\in D(A^s)$$

$u\in V_s$，令 $|u|_s=(u,u)_s^{\frac{1}{2}}$.

因 A^{-1} 是紧的和自共轭的，则存在 H 的正交基 $\{w_j\}$，由 A 的特征向量组成，

$$Aw_j=\lambda_j w_j \tag{1.3}$$

特征值满足

$$0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots,\qquad \lambda_j\to+\infty,\ j\to\infty \tag{1.4}$$

从(1.3),(1.4)易得

$$|A^{\frac{1}{2}}u| \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|, u \in D(A^{\frac{1}{2}}) \tag{1.5}$$

$$|A^{p+\frac{1}{2}}u| \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}}|A^p u|, \forall u \in D(A^{p+\frac{1}{2}}), \forall p \tag{1.6}$$

令 P_N 是 H 在 $\{w_1, w_2, \cdots, w_N\}$ 所成子空间的正交投影($N=1,2,\cdots$),$Q_N = I - P_N$. 在(1.2)中的非线性项为 $R(u)$,$B(u,u)$ 为双线性算子 $D(A)\times D(A)\to H$,C 是 $D(A)$ 到 H 的线性算子,$f\in D(A^{\frac{1}{2}})$. 进一步,设

$$(B(u,v),v) = 0, \forall u,v \in D(A) \tag{1.7}$$

$$|B(u,v)| \leq C_1|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}v|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}, \forall u,v \in D(A) \tag{1.8}$$

$$|Cu| \leq C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}, \forall u \in D(A) \tag{1.9}$$

其中 C_1, C_2 和下面的 $C_i(i=3,4)$ 均为正常数. 对 B, C 附加如下连续性质:

$$|A^{\frac{1}{2}}B(u,v)| \leq C_3|Au||Av|, \forall u,v \in D(A) \tag{1.10}$$

$$|A^{\frac{1}{2}}Cu| \leq C_4|Au|, \forall u \in D(A) \tag{1.11}$$

最后,设 $A+C$ 是正的,即有

$$((A+C)u,u) \geq \alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2, \forall u \in D(A), \alpha > 0 \tag{1.12}$$

考虑(1.1)的初值问题,即(1.1)满足初始条件

$$u(0) = u_0 \in H \tag{1.13}$$

设问题(1.11),(1.13)具有唯一解 $S(t)u_0, \forall t \in \mathbb{R}^+$. $S(t)u_0 \in D(A), \forall t \in \mathbb{R}^+$. 映射 $S(t)$ 具有通常的半群性质.

现对方程(1.1)的解作一致先验估计. 为此,需要如下不等式和引理:对于 $\beta>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p,q<+\infty$,有

$$\sum|x_i y_i| = \sum|\beta x_i||\beta^{-1}y_i|$$

$$\leq \frac{\beta^p}{p}\left(\sum |x_i|^p\right) + \frac{\beta - q}{q}\left(\sum |y_i|^q\right) \tag{1.14}$$

引理1.1 设 $g(t), h(t), y(t)$ 是三个正的可积函数, $t_0 \leq t < \infty$, 它满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \leq gy + h, \forall t \geq t_0 \tag{1.15}$$

且

$$\int_t^{t+1} g(s)\mathrm{d}s \leq \alpha_1, \int_t^{t+1} h(s)\mathrm{d}s \leq \alpha_2, \int_t^{t+1} y(s)\mathrm{d}s \leq \alpha_3, \forall t \geq t_0 \tag{1.16}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为正常数,则有

$$y(t+1) \leq (\alpha_3 + \alpha_2)\exp(\alpha_1), \forall t \geqslant t_0 \tag{1.17}$$

(1.1)和 u 作内积,利用(1.7),(1.12)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq |(f, u)|$$

$$\leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f|\,|A^{\frac{1}{2}}u|$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + \frac{1}{2\lambda_1\alpha}|f|^2$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \alpha|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq \frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2 \tag{1.18}$$

(1.1)和 Δu 作内积,由(1.8),(1.9)和(1.14),有

$$|B(u,u) + (u, Au)|$$

$$\leq C|u|^{\frac{1}{2}}|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{3}{2}} + C_2|A^{\frac{1}{2}}u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{3}{2}}$$

$$\leq 54(C_1^4|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4 + C_2^4|A^{\frac{1}{2}}u|^2) + \frac{1}{4}|Au|^2$$

类似地,有 $|(f, Au)| \leq |f|\,|Au| \leq |f|^2 + \frac{1}{4}|Au|^2$. 由此可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + \lambda_1|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + |Au|^2$$

$$\leq C_6|u|^2|A^{\frac{1}{2}}u|^4 + C_7|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2|f|^2 \tag{1.19}$$

(1.1)与 A^2u 作内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2 + |A^{\frac{3}{2}}u|^2$$

$$\leq |B(u,u) + (Cu,A^2u)| + |(f,A^2u)|$$

$$\leq |(A^{\frac{1}{2}}(B(u,u) + Cu),A^{\frac{3}{2}}u)| + |(A^{\frac{1}{2}}f,A^{\frac{3}{2}}u)|$$

$$\leq C_3|Au|^2|A^{\frac{3}{2}}u| + C_4|Au||A^{\frac{3}{2}}u| + |A^{\frac{1}{2}}f||A^{\frac{3}{2}}u|$$

$$\leq \frac{1}{2}C_8|Au|^4 + \frac{1}{2}C_9|Au|^2 + \frac{3}{2}|A^{\frac{1}{2}}f|^2 + \frac{1}{2}|A^{\frac{3}{2}}u|^2$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2 + \lambda_1|Au|^2 \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2 + |A^{\frac{3}{2}}u|^2$$

$$\leq C_8|Au|^4 + C_9|Au|^2 + 3|A^{\frac{1}{2}}f|^2 \tag{1.20}$$

将(1.15)应用于(1.18),可得 $u(t) = S(t)u_0$,

$$|u(t)|^2 \leq |u(0)|^2\exp(-\alpha\lambda_1 t) + \rho_0^2(1 - \exp(-\alpha\lambda_1 t)) \tag{1.21}$$

其中 $\rho_0 = \frac{1}{2\lambda_1}|f|$. 因此 $|u(t)|$ 对 t 一致有界,有

$$\lim_{t\to\infty}\sup|u(t)|^2 \leq \rho_0^2 \tag{1.22}$$

再从(1.18),有 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{1}{2}}u|^2\mathrm{d}s$ 是一致有界的. 由(1.19),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^4 + (C_7 - \lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2|f|^2$$

其中 $C_{10} = C_6b_0^2$, $|u(t)|^2 \leq b_0^2$, $t \geq 0$. 则由引理 1.1,令

$$g = C_{10}|A^{\frac{1}{2}}u|^2,\ y = |A^{\frac{1}{2}}u|^2$$

$$h = (C_7 - \lambda_1)|A^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2|f|^2$$

可得 $|A^{\frac{1}{2}}u|^2$ 在 H 上一致有界. 由(1.19)可知 $\int_t^{t+1}|Au(s)|^2\mathrm{d}s$ 一致有界,再从(1.20)可得 $|Au(t)|^2$ 和 $\int_t^{t+1}|A^{\frac{3}{2}}u(s)|^2\mathrm{d}s$ 对 t 一致有界,因而

$$\limsup_{t\to+\infty}|A^{\frac{1}{2}}u(t)|^2\leq\rho_1^2 \tag{1.23}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}|Au(t)|^2\leq\rho_2^2 \tag{1.24}$$

从(1.22),(1.23),(1.24)可知:(1.1)的任何解在某个时间之后 $(t\geq t_0>0)$ 分别进入球

$$B_0=\{x\in H,|x|\leq 2\rho_0\}$$

$$B_1=\{x\in D(A^{\frac{1}{2}}),|A^{\frac{1}{2}}x|\leq 2\rho_1\}$$

$$B_2=\{x\in D(A),|Ax|\leq 2\rho_2\}$$

中,且 B_2 的 ω 极限集 $\mathscr{A}$,

$$\mathscr{A}=\omega(B_2)=\bigcap_{s\geq 0}Cl(\bigcup_{t\geq s}S(t)B_2)$$

是(1.1)的整体吸引子,闭包 Cl 取在 H 上,且有

$$\mathscr{A}\subseteq B_2\cap B_1\cap B_0$$

我们考虑(1.1)的截断方程的惯性流形. 设 $\theta(s)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 到 $[0,1]$ 的光滑函数:$\theta(s)=1,0\leq s\leq 1;\theta(s)=0,s\geq 2,|\theta'(s)|\leq 2,s\geq 0$. 固定 $\rho=2\rho_2$,定义

$$\theta_\rho(s)=\theta\left(\frac{s}{\rho}\right),\quad s\geq 0$$

则(1.1)的截断方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+\theta_\rho(|Au|)R(u)=0 \tag{1.25}$$

(1.25)具初值 $u(0)=u_0\in H$ 的解的存在性、唯一性的证明是直接的. 显然,当 $|Au|\leq\rho$ 时,$\theta_s(|Au|)=1$. (1.24)和(1.1)是相合的. 当 $|Au|\geq 2\rho$ 时,$\theta_\rho(|Au|)=0$. 作(1.24)与 A^2u 的内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+\lambda_1|Au|^2\leq\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Au)^2+|A^{\frac{3}{2}}u|^2\leq 0$$

因而轨线 $u(t)$将在 $D(A)$中以指数收敛于半径 $\rho_3 \geq 2\rho$ 的球中.另外,$R(u)$对 u 是局部 Lipschitz 连续的,而 $F(u)=\theta_\rho(|u|)\cdot R(u)$是整体 Lipschitz(以下简写 Lip)连续,即存在 K,使

$$|F(u)-F(v)| \leq K|u-v|, \forall u,v \in H \quad (1.26)$$

定义 半群算子$\{S(t)\}_{t\geq 0}$的惯性流形,是一个有限维的光滑流形 $\mu \in H$(起码是 Lip),它满足

(i)μ 是不变的.即有

$$S(t)\mu \subset \mu. \quad (1.27)$$

(ii)μ 指数地吸引(1.25)方程的所有解.即存在常数 $k_1>0$,$k_2>0$,对于 $u_0 \in H$,有

$$\mathrm{dist}(S(t)u_0,\mu) \leq k_1 e^{-k_1 t}, \forall t \geq 0 \quad (1.28)$$

(iii)吸引子 $\mathscr{A}$在 μ 上.

现在要构造出惯性流形,从而证明惯性流形的存在性.设 P_N 是在H 中N 维的正交投影,$Q_N=I-P_N$.并记 $P=P_N$,$Q=Q_N$.设 $u(t)$是(1.25)的解.令 $p(t)=Pu$,$q(t)=Qu$,则 $p(t)$,$q(t)$ 在 PH 和QH 上满足:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+PF(u)=0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq+QF(u)=0 \quad (1.30)$$

其中 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$.且 $u=p+q$.我们寻求惯性流形 μ,它是由 Lip 函数 Φ:$PD(A) \to QD(A)$的图构造得到的.即 $\mu=\mathrm{graph}\Phi$.函数 Φ 作为一个算子,在函数类 $\mathscr{F}_{b,l}$上的不动点得到.其中 $\mathscr{F}_{b,l}$是一类函数Φ:$PD(A) \to QD(A)$,它满足

$$|A\Phi(p)| \leq b, \ \forall p \in PD(A) \quad (1.31)$$

$$|A\Phi(p_1)-A\Phi(p_2)| \leq l|Ap_1-Ap_2|, \ \forall p_1,p_2 \in PD(A) \quad (1.32)$$

$$\mathrm{supp}\Phi \subset \{p \in PD(A) \mid |Ap| \leq 4\rho\}$$

其中 $b>0$,$l>0$.当 $p=p(t)$,$q=\Phi(p(t))$满足(1.29)(1.30)时,$u=p(t)+\Phi(p(t))$为(1.25)的解.设 Φ 在 $\mathscr{F}_{b,l}$中给定,$p_0 \in$

$PD(A)$,则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + Ap + PF(p + \Phi(p)) = 0,\ p(0) = p_0 \quad (1.33)$$

的解 $p = p(t;p_0,\Phi)$是唯一存在的.这是由于 $\sigma \to \theta_\rho R(\sigma + \Phi(\sigma))$ 是 Lip 连续的.因 $p = p(t;p_0,\Phi)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.类似于(1.30),有

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Aq + QF(p + \Phi(p)) = 0,\ p(0) = p_0 \quad (1.34)$$

由于 $QF(p + \Phi(p))$是有界的:$R \to H$,因此(1.34)存在唯一的当 $t \to \infty$时是有界的解 $q(t)$.由此可得

$$q(0) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\tau AQ} QF(p + \Phi(p))\mathrm{d}\tau \quad (1.35)$$

其中 $p = p(\tau) = p(\tau, \Phi, p_0)$. $q(0)$依赖于 $\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$和 $p \in PD(A)$. $q(0) = q(0, p_0, \Phi)$.函数

$$p_0 \in PD(A) \to q(0;p_0,\Phi) \in QD(A)$$

把 $PD(A)$映射到 $QD(A)$,记为$\mathscr{F}\Phi$.因此

$$\mathscr{F}\Phi(p_0) = -\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau AQ} QF(u)\mathrm{d}\tau \quad (1.36)$$

其中 $u = u(\tau) = p(\tau, \Phi, p_0) + \Phi(p(\tau;\Phi, p_0))$.因 $q(0) = \Phi(p_0)$,于是寻求关于 N, b, l 的条件,使

(i)$\mathscr{F}$映射 $\mathscr{F}_{b,l}$到自身;

(ii)$\mathscr{F}$在 $\mathscr{F}_{b,l}$上是压缩的.

现在考虑函数 $\Phi: PD(A) \to QD(A)$($P = P_N, Q = Q_N = I - P_N$). $\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$,即满足(1.31)~(1.33).

引入距离

$$\|\Phi - \Psi\| = \sup_{p \in D(A)} |A\Phi(p) - A\Psi(p)| \quad (1.37)$$

则$\mathscr{F}_{b,l}$是一个完备的度量空间.对于 $\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$,映射$\mathscr{F}$在 $PD(A)$上定义为

$$\mathscr{F}\Phi(p_0) = -\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\tau AQ} QF(u)\mathrm{d}\tau,\ p_0 \in PD(A) \quad (1.38)$$

其中 $u(\tau) = p(\tau;\Phi, p_0) + \Phi(p(\tau;\Phi, p_0))$, $p(\tau;\Phi, p)$是(1.29)满足 $p(0;\Phi, p_0) = p_0$ 的解.以下我们对算子$\mathscr{F}$的性质进行研究.

引理 1.2 设 $\alpha>0$ 和 $\tau<0$,算子 $(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}$ 在 QH 上是线性、连续的,它在 $\mathscr{L}(QH)$ 上的模(即 $|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0_p}$)是囿于

$$\begin{aligned} &K_3|\tau|^{-\alpha}, \quad \text{当} -\alpha\lambda_{N+1}^{-1}\leq\tau<0 \text{ 时} \\ &\lambda_{N+1}^{\alpha}e^{\tau\lambda_{N+1}}, \quad \text{当} -\infty<\tau\leq-\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时} \end{aligned} \tag{1.39}$$

证 设 $v=\sum_{j=N+1}^{\infty}b_j\omega_j$ 是 QH 上的一个元素,则

$$\begin{aligned} |(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}v|^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty}(\lambda_j^\alpha e^{\tau\lambda_j})^2b_j^2 \leq \sup_{\lambda\geq\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2\sum b_j^2 \\ &= \sup_{\lambda\geq\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau\lambda})^2|v|^2 \end{aligned}$$

因此

$$|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0_p}\leq\sup_{\lambda\geq\lambda_{N+1}}\lambda^\alpha e^{\tau\lambda}$$

初等计算表明

$$\sup_{\lambda\geq\lambda_{N+1}}(\lambda^\alpha e^{\tau A\lambda})=\begin{cases}|\tau|^{-\alpha}(\alpha e^{-1})^\alpha, & \text{当} -\alpha\lambda_{N+1}^{-1}\leq\tau<0 \text{ 时} \\ \lambda_{N+1}^{\alpha}e^{\tau\lambda_{N+1}}, & \text{当 } \tau\leq-\alpha\lambda_{N+1}^{-1} \text{ 时}\end{cases}$$

我们得到(1.39),其中 $K_3=K_3(\alpha)=(\alpha e^{-1})^\alpha$.

作为(1.39)的直接推论,有

$$\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^\alpha e^{\tau AQ}|_{0_p}d\tau\leq(1-\alpha)^{-1}e^\alpha\lambda_{N+1}^{-\alpha-1} \quad (0<\alpha<1) \tag{1.40}$$

从(1.10),(1.11)可得

$$\begin{aligned} |(AQ)^{\frac{1}{2}}R(u)| &\leq |A^{\frac{1}{2}}B(u,u)|+|A^{\frac{1}{2}}Cu|+|A^{\frac{1}{2}}f| \\ &\leq C_3|Au|^2+C_4|Au|+|A^{\frac{1}{2}}f| \end{aligned}$$

当 $|Au|>2\rho$ 时,$\theta_\rho(|Au|)=0$,有

$$|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|\leq K_4 \tag{1.41}$$

其中 $K_4=4C_3\rho^2+|A^{\frac{1}{2}}f|$,$F(u)$ 由(1.30)所决定.

引理 1.3 设 $p_0\in PD(A)$,$\mathscr{F}\Phi(p_0)\in QD(A)$,则

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)|\leq K_5\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{1.42}$$

$$|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{F}\Phi(p_0)| \le K_6\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} \tag{1.43}$$

其中 K_5, K_6 是适当的常数，它与 p_0, Φ 无关.

证 因 $Qe^{\tau AQ} = e^{\tau AQ}$，易见 $\mathscr{F}\Phi(p_0) \in QD(A)$，

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} |AQe^{\tau AQ}F(u)|\,d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0_p}|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|\,d\tau$$

$$|A^{\frac{5}{4}}\mathscr{F}\Phi(p_0)| \le \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{5}{4}}e^{\tau AQ}F(u)|\,d\tau$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{3}{4}}e^{\tau AQ}|_{0_p}|(AQ)^{\frac{1}{2}}F(u)|\,d\tau$$

不等式(1.43)，(1.42)可从(1.40)，(1.41)得到. 现取

$$b = K_5\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{1.44}$$

则对 $\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$，类似于(1.31)，$\mathscr{F}\Phi$ 满足

$$|A\mathscr{F}\Phi(p_0)| \le b, \ \forall p_0 \in PD(A) \tag{1.45}$$

由于(1.43)，$\mathscr{F}\Phi$ 是在 $D(A^{\frac{5}{4}})$ 中的有界集. 因 $A^{-\frac{1}{4}}$ 是紧的，因此，$\mathscr{F}\Phi$ 的值域是 $QD(A)$ 的一个紧子集. 它不依赖于 Φ

现考虑 $\mathscr{F}\Phi$ 的支集性质、连续性质.

引理1.4 对每个 $\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$，$\mathscr{F}\Phi$ 的支集包含在 $\{p \in PD(A); |Ap| \le 4\rho\}$ 中.

证 $u = p + \Phi(p)$. 如 $|Ap| > 2\rho$，则

$$|Au| = (|Ap|^2 + |A\Phi(p)|^2)^{\frac{1}{2}} \ge |Ap| > 2\rho$$

因此 $\theta_\rho(|Au|) = 0$.

现设 $|Ap_0| > 4\rho$，则在 t 的某个区间上 $|Ap(t)| > 2\rho$. 于是，方程(1.28)为

$$\frac{dp}{dt} + Ap = 0$$

由此推出

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Ap|^2+\lambda_1|Ap|^2\leq\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|Ap|^2}{\mathrm{d}t}+|A^{\frac{3}{2}}p|^2=0$$

因此,对 $\tau<0$,有

$$2\rho<|Ap(0)|\leq|Ap(\tau)|\exp(\lambda_1\tau)\leq|Ap(\tau)|$$

因而 $\theta_\rho(|Au(\tau)|=0,\forall\tau<0$.由(1.38),有

$$\mathscr{F}\Phi(p_0)=0,\quad\forall\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$$

先证非线性 $F(u)$的 Lip 性质.

引理 1.5 设 $p_1,p_2\in PD(A),\Phi_1,\Phi_2\in\mathscr{F}_{b,l},u_i=p_i+\Phi(p_i)$,则

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)|\\&\leq K_7[(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|]\end{aligned}\tag{1.46}$$

其中常数 K_7 不依赖于 p_i 或Φ_i(其中 $i=1,2$).

证 首先,注意到从(1.10)和(1.11)推出

$$\begin{aligned}&|A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-A^{\frac{1}{2}}R(u_2)|\\&\leq|A^{\frac{1}{2}}[B(u_1,u_1)-B(u_1,u_2)+B(u_1,u_2)\\&\quad-B(u_2,u_2)]|+|A^{\frac{1}{2}}C(u_1-u_2)|\\&\leq C_3(|Au_1|+|Au_2|)|Au_1-Au_2|+C_4|Au_1-Au_2|\end{aligned}$$

和

$$|A^{\frac{1}{2}}R(u_1)|\leq C_3|Au_1|^2+C_4|Au_1|^2+|A^{\frac{1}{2}}f|$$

定义 G 如下:

$$\begin{aligned}G&=A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)\\&=\theta_\rho(|Au_1|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-\theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_2)\end{aligned}$$

分三种情况讨论:

(i)$2\rho\leq|Au_1|,2\rho\leq|Au_2|$,

(ii)$|Au_1|<2\rho\leq|Au_2|$或$|Au_2|<2\rho\leq|Au_1|$,

(iii)$|Au_1|\leq2\rho,|Au_2|\leq2\rho$.

利用当 $|Au|\geq 2\rho$ 时 $\theta_\rho(|Au_1|)=0$ 和 $|\theta'|\leq 2\rho^{-1}$,我们得到:

(i) $G=0$,

(ii)
$$\begin{aligned}|G| &= |\theta_\rho(|Au|)A^{\frac{1}{2}}R(u)| \\ &= |\theta_\rho(|Au_1|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)-\theta_\rho(|Au_2|)A^{\frac{1}{2}}R(u_1)| \\ &\leq |\theta_\rho(|Au_1|)-\theta_\rho(|Au_2|)||A^{\frac{1}{2}}R(u_1)| \\ &\leq 2\rho^{-1}||Au_1|-|Au_2||(C_3|Au_1|^2+C_4|Au_2|^2+ \\ &\quad |A^{\frac{1}{2}}f|)+[C_3(|Au_1|+|Au_2|)+C_4] \\ &\quad \cdot|Au_1-Au_2|\end{aligned}$$

因此

$$|A^{\frac{1}{2}}F(u_1)-A^{\frac{1}{2}}F(u_2)|\leq K_7|Au_1-Au_2| \tag{1.47}$$

其中 $K_7=2\rho^{-1}(C_3 4\rho^2+C_4 2\rho+|A^{\frac{1}{2}}f|)+C_3 4\rho+C_4$.因

$$u_1-u_2=p_1-p_2+(\Phi_1(p_1)-\Phi_1(p_2))+(\Phi_2(p_2)-\Phi_2(p_2))$$

有 $|Au_1-Au_2|\leq(1+l)|Ap_1-Ap_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|$. 联合(1.47),即得(1.46).

现在来证明:在适当假设之下,$\mathscr{F}$是从 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到 $\mathscr{F}_{b,l}$ 的 Lip 映射,且是严格压缩的.

首先,设 Φ 是固定的,$p_{01},p_{02}\in PD(A)$,$p=p_1(t)$,$p=p_2(t)$是(1.28)满足初始条件 $p_i(0)=p_{0i}$ 的解($i=1,2$).

令 $\Delta=p_1-p_2$,则 Δ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}+A\Delta+PF(u_1)-PF(u_2)=0 \tag{1.48}$$

其中 $u_i=p_i+\Phi(p_i)$,$i=1,2$.作(1.48)与 $A^2\Delta$ 的内积,得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|^2+|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2=-(A^{\frac{1}{2}}P(F(u_1)-F(u_2)),A^{\frac{3}{2}}\Delta) \tag{1.49}$$

由(1.46),得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|^2+|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2\leq K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|$$

因此$|A\Delta|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|\geq-|A^{\frac{3}{2}}\Delta|^2-K_7(1+l)|A\Delta||A^{\frac{3}{2}}\Delta|$.因$\Delta\in PD(A)$,有

$$|A^{\frac{3}{2}}\Delta|\leq\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|.$$

因此

$$|A\Delta|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|\geq-\lambda_N|A\Delta|^2-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}|A\Delta|^2$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|+(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})|A\Delta|\geq 0 \qquad (1.50)$$

从(1.50)可得

$$|A\Delta(\tau)|\leq|A\Delta(0)|\exp(-\tau(\lambda_N+K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}))\quad\tau\leq 0 \qquad (1.51)$$

引理 1.6 设 $\gamma_N=\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}}>0$,则对 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$和$p_{01},p_{02}\in PD(A)$,有

$$\left|A\mathscr{F}\Phi(p_{01})-A\mathscr{F}\Phi(p_{02})\right|\leq L\left|Ap_{01}-Ap_{02}\right| \qquad (1.52)$$

其中

$$L=K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}[1+(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2}\right)$$

$$\gamma_N=\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}},\quad \alpha_N=1+K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$

推出 $\Phi\in\mathscr{F}_{b,l}$.

证 由(1.38)和(1.46),有

$$\begin{aligned}&\left|A\mathscr{F}\Phi(p_{01})-A\mathscr{F}\Phi(p_{02})\right|\\&\leq\int_{-\infty}^{0}\left|AQ\mathrm{e}^{\tau AQ}Q(F(u_1)-F(u_2))\right|\mathrm{d}\tau\\&\leq K_7(1+l)\int_{-\infty}^{0}|(AQ)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\tau AQ}|_{0_p}|A\Delta(\tau)|\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

其中 $\Delta = p_1 - p_2$. 由引理 1.2 和(1.51),有

$$\int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}} e^{\tau AQ}|_{0_p} |A\Delta(\tau)| d\tau$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \exp[\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})] d\tau\right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{1}{2}\lambda_{N+1}^{-1}}^{0} K_3\left(\frac{1}{2}\right) |\tau|^{-\frac{1}{2}} \exp[-\tau(\lambda_N + K_7(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}})] d\tau\right)$$

$$\cdot |Ap_{01} - Ap_{02}|$$

由初等计算可知,最后右端表达式囿于

$$\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} [1 + (1 - \gamma_N \alpha_N)^{-1}] \exp\left(\frac{\gamma_N \alpha_N}{2}\right) |Ap_{01} - Ap_{02}|$$

这就证明了(1.52). 由(1.44),(1.52)和引理 1.4 推得

$$\mathscr{F}\Phi \in \mathscr{F}_{b,l}$$

至此我们已证明了映射 $\mathscr{F}: \mathscr{F}_{b,l} \to \mathscr{F}_{b,l}$. 现证 $\mathscr{F}$ 是 Lip 映射. 为此,考虑两个函数 Φ_1 和 Φ_2,具有同一初始条件. 令

$$p_i = p(t; \Phi_i, p_0), u_i = p_i + \Phi_i(p_i), i = 1,2.$$

我们估计 $|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)|$. 用相似的方法,可得

$$\frac{d}{dt}|A\Delta| + \lambda_N \alpha_N |A\Delta| \geq -K_7 \lambda_N^{\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\| \tag{1.53}$$

其中 $\Delta = p_1 - p_2$, $\alpha_N = (1 + K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}})$. 因 $\Delta(0) = 0$, 从(1.53)可得:

$$|A\Delta(\tau)| \leq \frac{K_7 \lambda_N^{\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\|}{\alpha_N \lambda_N} (\exp(-\alpha_N \lambda_N \tau) - 1$$

$$\leq K_7 \lambda_N^{-\frac{1}{2}} \|\Phi_1 - \Phi_2\| \exp(-\alpha_N \lambda_N \tau) \quad \tau \leq 0 \tag{1.54}$$

如同引理 1.6,由(1.38),(1.46)和(1.54),可得

$$|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} |AQe^{\tau AQ}(F(u_1) - F(u_2))| d\tau$$

$$\leq K_7\int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0_p}[(1+l)|A\Delta| + \|\Phi_1 - \Phi_2\|]d\tau$$

$$\leq K_7\|\Phi_1 - \Phi_2\|\int_{-\infty}^{0} |(AQ)^{\frac{1}{2}}e^{\tau AQ}|_{0_p}$$

$$\cdot(1 + K_7\lambda_N^{-\frac{1}{2}}(1+l)e^{-\lambda_N\alpha_N\tau})d\tau \quad (1.55)$$

由引理 1.2,(1.55)右端的积分囿于

$$2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + K_7(1+l)\lambda_N^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{-\alpha}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\exp[\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N\alpha_N)]d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{-\alpha}^{0}K_3\left(\frac{1}{2}\right)|\tau|^{-\frac{1}{2}}\exp(-\lambda_N\alpha_N\tau)d\tau\right.$$

$$\leq 2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + K_7(1+l)\lambda_N^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left[\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}(1 + (1-\gamma_N\alpha_N)^{-1})\exp\left(\frac{\gamma_N\alpha_N}{2}\right)\right]$$

$$\leq 2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + \lambda_N^{-\frac{1}{2}}L$$

于是,有

$$|A\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - A\mathscr{F}\Phi_2(p_0)|$$

$$\leq L'\|\Phi_1 - \Phi_2\|, \forall p_0 \in PD(A) \quad (1.56)$$

其中 $L' = K_7(2e^{-\frac{1}{2}}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} + \lambda_N^{-\frac{1}{2}}L)$.

如上所述,我们寻求条件保证 $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 到自身,并在 $\mathscr{F}_{b,l}$ 中是严格压缩的.这就要求寻找充分条件(对 λ_N 和 λ_{N+1}),使之保证

$$L \leq l \qquad L' < 1$$

首先,注意到 $\gamma_N = \lambda_{N+1} - \lambda_N - k_l(1+l)\lambda_N^{\frac{1}{2}} > 0$ 等价于

$$1 - \gamma_N\alpha_N > 0 \quad (1.57)$$

或

$$1 > \gamma_N\alpha_N > 0 \quad (1.57')$$

则从(1.57)推出

$$L \leq K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}[1 + (1-\gamma_N\alpha_N)^{-1}]$$

为使 $L \leqslant l$,充分地选取 N,使得以下两个不等式成立:

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{l}{2} \tag{1.58}$$

$$K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(1-\gamma_N\alpha_N)^{-1} \leq \frac{l}{2} \tag{1.59}$$

(1.58)可写为

$$K_{10} \leq \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \tag{1.60}$$

其中 $K_{10}=2K_7(1+l)L^{-1}$. 现设选取 N,使(1.60)成立. 不等式(1.59)可写成

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \leq 1-\gamma_N\alpha_N \tag{1.61}$$

它等价于

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} - 1 + \gamma_N + K_7(1+l)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}} \leq 0 \tag{1.62}$$

其中 $\gamma_N=\dfrac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}$. 设

$$\gamma_N^{\frac{1}{2}} + K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} = (\lambda_N\lambda_{N+1}^{-1})^{\frac{1}{2}} + K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \leq 1 \tag{1.63}$$

应用(1.63)两次,得

$$K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} - 1 + \gamma_N K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\gamma_N^{\frac{1}{2}} \leq K_{10}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} - 1 + \gamma_N^{\frac{1}{2}} \leq 0 \tag{1.64}$$

因 $l \leq \dfrac{1}{8}$,有 $K_7(1+l) \leq K_{10}$. 由(1.63)推出(1.62),再推出(1.61).

因此,为使 $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为 $\mathscr{F}_{b,l}$,我们需设 $\gamma_N>0$ 或 $1-\gamma_N\alpha_N>0$. 这个假设由(1.61)所保证. $\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为自身的充分条件是(1.58),(1.61),它由(1.60),(1.63)保证. 容易看到,这两个不等式是

$$K_{10} \leq \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} - \lambda_N^{\frac{1}{2}} \tag{1.65}$$

的推论.

为使 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}_{b,l}$ 上的压缩映射，必须 $L'<1$. 设 $L'\leq\frac{1}{2}$，从而推出

$$K_{11}\leq\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} \tag{1.66}$$

其中 $K_{11}=2K_7(2e^{-\frac{1}{2}}+L)$. 因此，在条件(1.65)，(1.66)下，$\mathscr{F}$ 映射 $\mathscr{F}_{b,l}$ 为自身，且是压缩的. 因此，$\mathscr{F}$ 存在不动点.

现在来证明 $M=\text{graph}(\Phi)$ 在 $S(t)$ 作用下是不变的. 即有

$$S(t)M\subset M,\ \forall\, t\geq 0 \tag{1.67}$$

并证明它吸引着所有轨线指数地逼近 M.

先证明 M 的不变性. 事实上，从表达式

$$\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau,p_0))d\tau \tag{1.68}$$

其中 $u(\tau,p_0)=p(\tau,\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau);\Phi,p_0)$，现置 p_0 为 $p(t)=p(t;\Phi,p_0)$ 于(1.68)中，且注意到

$$p(\tau,\Phi,p(t;\Phi,p_0))=p(\tau+t;\Phi,p_0)$$

可推出

$$\begin{aligned}\Phi(p(t))&=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u(\tau),p(t))d\tau\\&=-\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)AQ}QF(u(\tau),p_0)d\tau,\ \forall\, t\in\mathbb{R}\end{aligned} \tag{1.69}$$

上式对 t 微商，容易看到，$(p(t),q(t))$是问题(1.29)，(1.30)的解，$u(t)=p(t)+q(t)$为(1.25)的解，其中 $q(t)=\Phi(p(t))$. 这就表明 $S(t)M\subseteq M$, $\forall\, t\geq 0$.

为了证明 M 指数地吸引(1.25)的所有解，我们先叙述方程(1.20)的挤压性质：

挤压性质 对每一个 $T>0,\gamma>0,r>0$，存在常数 K_2,K_3（它依赖于 T,γ,r 和常数 $C_1\sim C_4$，但不依赖于 $S(t)$和 N），使得对每一个 $N\geq 1$，如下之一不等式成立：

$$|Q_N(S(t)u_0-S(t)v_0)|\leq|P_N(S(t)u_0)-S(t)v_0)| \tag{1.70}$$

或

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \le K_2\exp(-K_3\alpha\lambda_{N+1}t)|u_0 - v_0| \tag{1.71}$$

将这个结果用于满足 $t_0 \le t \le 2t_0$ 的一切 t，其中 $t_0 = \left(\frac{1}{2K_1}\right)\log 2$，$K_1$ 为常数. 当 $|Au_0| \le r$，$|Av_0| \le r$ 时，有

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \le \exp(K_1 t)|u_0 - v_0|, \forall t \ge t_0$$

$\gamma = \frac{1}{8}$，$N \ge N_0$，其中 N_0 满足

$$\lambda_{N_0+1} \ge (2K_3\alpha t_0)^{-1}\log(2K_2) \tag{1.72}$$

此时(1.70)，(1.71)变为

$$|Q_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \le \frac{1}{8}|P_N(S(t)u_0 - S(t)v_0)| \tag{1.73}$$

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0| \le \frac{1}{2}|u_0 - v_0| \tag{1.74}$$

其中 $u_0, v_0 \in D(A)$，$|Au_0| \le r$，$|Av_0| \le r$，$t_0 \le t \le 2t_0$.

固定 $r = 4\rho + b$，依(1.24)，(1.25)的轨线终将在 $D(A)$ 中进入以 0 为原点以 $4\rho = 8\rho_2$ 为半径的球内. 设

$$|Au_0| \le 4\rho,\quad |AS(t)u_0| \le 4\rho, \forall t \ge 0$$

我们首先证明：对于任何 t_1，$t_0 \le t_1 \le 2t_0$，有

$$\operatorname{dist}(S(t_1)u_0, \mu) \le \frac{1}{2}\operatorname{dist}(u_0, M)$$

其中 $\operatorname{dist}(\phi, M) = \inf\{|\phi - v| : v \in M\}$. 为此，选取 v_0，使 $|u_0 - v_0| = \operatorname{dist}(u_0, M)$. 则 $v_0 = Pv_0 + \Phi(Pv_0)$. 我们要求 $|APv_0| \le 4\rho$. 否则，如 $|APv_0| > 4\rho \ge |APu_0|$，则 $\Phi(Pv_0) = 0$，$v_0 = Pv_0$. 另外，存在 β，$0 < \beta \le 1$，使 $|APv_\beta| = 4\rho$，其中 $v_\beta = \beta Pu_0 + (1-\beta)v_0 \in PD(A)$. 则有 $\Phi(v_\beta) = 0$. 因此 $v_\beta \in \mu$，且

$$\begin{aligned}|v_\beta - v_0|^2 &= |v_\beta - Pu_0|^2 + |Qu_0|^2 \\ &= |(1-\beta)(v_0 - Pu_0)|^2 + |Qu_0|^2\end{aligned}$$

$$< |v_0 - Pu_0|^2 + |Qu_0|^2 = |v_0 - u_0|^2$$

这和$|v_0 - u_0| = \mathrm{dist}(u_0, M)$矛盾.因$|\Phi(Pv_0)| \le b$,有

$$|Av_0| \le |APv_0| + |A\Phi(Pv_0)| \le 4\rho + b = r$$

其次,对 $S(t)u_0$ 和 $S(t)v_0$ 应用挤压性质(1.73),(1.74).如(1.74)成立,则

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(S(t_1)u_0, \mu) &\le |S(t_1)u_0 - S(t_1)v_0| \\ &\le \frac{1}{2}|u_0 - v_0| \le \frac{1}{2}\mathrm{dist}(u_0, \mu)\end{aligned}$$

如(1.73)成立,则

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(S(t_1)u_0, \mu) &\le |S(t_1)u_0 - (P(S(t_1)u_0) + \Phi(PS(t)u_0))| \\ &\le |QS(t_1)u_0 - QS(t_1)v_0| \\ &\quad + |\Phi(PS(t_1)v_0) - \Phi(PS(t_1)u_0)| \\ &\le \left(\frac{1}{8} + l\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}\right)|PS(t_1)v_0 - PS(t_1)u_0|\end{aligned}$$

从(1.73),(1.32)和

$$|q| \le \lambda_{N+1}^{-1}|Aq|, \quad q \in QD(A)$$

$$|Ap| \le \lambda_N |p|, \quad p \in PD(A)$$

有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(S(t_1)u_0, M) &\le \frac{1}{4}|S(t_1)v_0 - S(t_1)u_0| \\ &\le \frac{1}{2}|v_0 - u_0| = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(u_0 - M)\end{aligned}$$

于是,对任意 $t \ge t_0, t = nt_1, t_0 \le t \le 2t_0$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(S(t)u_0, \mu) &\le \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{dist}(u_0, M) \\ &= \exp\left(-\frac{t}{t_1}\log 2\right)\mathrm{dist}(u_0, M) \\ &\le \exp\left(-\frac{t}{2t_0}\log 2\right)\mathrm{dist}(u_0, M) \quad (1.75)\end{aligned}$$

它指出指数衰减收敛率为$\frac{1}{2t_0}\log 2$.

我们再证明整体吸引子 $\mathscr{A}\subset M$. 事实上,如 $u\in\mathscr{A}$,则解 $S(t)u$对一切t 定义. 根据(1.23),(1.24)有

$$\text{dist}(S(t)u,M)\leq 2\rho_2,\ \forall t\in R$$

令 $v=S(-t)u$,其中 $t\geq t_0$,则从(1.75),有

$$\text{dist}(u,M)=\text{dist}(S(t)v,M)\leq \exp\left(-\frac{t}{t_0}\log 2\right)\cdot 2\rho_2$$

就推出 $\text{dist}_{u\in\mathscr{A}}(u,M)=0$,因此 $\mathscr{A}\subset M$.

综合以上结果,可得如下定理:

定理1.7 设满足(1.1)~(1.11),并设 $0<l<\frac{1}{8}$,N_0 为(1.72)所确定,存在常数 K_{10}、K_{11}(依赖于 l 和初值),使

$$N\geq N_0,\ \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}\geq K_{11},\ \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}}\geq K_{10} \tag{1.76}$$

则存在 $b>0$,使

(i)$\mathscr{F}$映射 $\mathscr{F}_{b,l}$为 $\mathscr{F}_{b,l}$.

(ii)$\mathscr{F}$在 $\mathscr{F}_{b,l}$中具有一个不动点.

(iii)$M=\text{graph}(\Phi)$是(1.25)的惯性流形.

(iv)M 含有(1.1)的整体吸引子.

定理1.8 设方程(1.1),(1.25)给定在 H 上,其中非线性项 $F(u)=\theta_\rho(|Au|)R(u)$满足(1.26). 设 l 给定,$0<l<\frac{1}{8}$. 设存在 ρ_0,使(1.1)的每个解(1.21)成立. 则存在常数 N_0,K_{12},K_{13}(它们依赖于 l 和问题的初值),使

$$N\geq N_0,\ \lambda_{N+1}\geq K_{12},\ \lambda_{N+1}-\lambda_N\geq K_{13} \tag{1.77}$$

且定理 1.7 的结论成立.

证 非线性项 $F(u)=\theta_\rho(u)R(u)$满足整体 Lip 条件

$$|F(u)-F(v)|\leq K|u-v|,\ \forall u,v\in H$$

选取参数 $\rho=2\rho_0$. 空间 $\mathscr{F}_{b,l}$由 $\Phi:PH\to QH$ 组成,满足:

$$|\Phi(p)\leq b,\ \forall p\in PD(A)$$

$$|\Phi(p_1)-\Phi(p_2)|\leq l|p_1-p_2|,\ \forall p_1,p_2\in D(A)$$

$$\operatorname{supp}\Phi\subseteq\{p\in PD(A)\,\|\,p|\leq 4\rho\}$$

算子$\mathscr{F}$定义为

$$\mathscr{F}\Phi(p_0)=-\int_{-\infty}^{0}e^{\tau AQ}QF(u)\mathrm{d}\tau$$

其中 $u=u(\tau)=p(\tau;\Phi,p_0)+\Phi(p(\tau;\Phi,p_0))$. 不等式(1.41)换为

$$|F(u)|\leq K'_4$$

其中 K'_4 依赖于 $R(u)$, θ 和 ρ. 引理 1.2 当 $\alpha=0$ 时成立, 不等式(1.40)当 $\alpha=0$ 时成立, (1.42)换为

$$|\mathscr{F}\Phi(p_0)|\leq K'_5\lambda_{N+1}^{-1}$$

其中 $K'_5=K'$. 因此, 可取 $b=K'_5\lambda_{N+1}^{-1}$. 引理 1.4 将模 $|Av|$ 换为 $|v|$ 模, 不等式(1.46)变为

$$|F(u_1)-F(u_2)|\leq K'_7[(1+l)|p_1-p_2|+\|\Phi_1-\Phi_2\|],\tag{1.78}$$

其中 $\|\Phi\|=\sup\{\Phi(p)|;p\in PD(A)\}$.

令 $\Delta=p_1-p_2$, 则(1.48)是相同的. 作(1.48)和 Δ 的内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta|^2+|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2=-P(F(u_1)-F(u_2)),\Delta)$$

从(1.78)可得:

$$\left|\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta|^2+|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2\right|\leq K'_7(1+l)|\Delta|^2$$

由此推出

$$\begin{aligned}|\Delta|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta|&\geq-|A^{\frac{1}{2}}\Delta|^2-K'_7(1+l)|\Delta|^2\\&\geq-\lambda_N|\Delta|^2-K'_7(1+l)|\Delta|^2\end{aligned}$$

于是, 有

$$|\Delta(\tau)|\leq|\Delta(0)|\exp(-\tau(\lambda_N+K_7(1+l))),\ \tau<0$$

代替不等式(1.51).在引理 1.6 中对 v_N 的假设可换为

$$|\mathscr{F}\Phi(p_{01}) - \mathscr{F}\Phi(p_{02})| \leq L|p_{01} - p_{02}|$$

其中 $L = K'_7(1+l)\lambda_N^{-1}$.事实上

$$\begin{aligned}
&|\mathscr{F}\Phi(p_{01}) - \mathscr{F}\Phi(p_{02})| \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} |e^{\tau AQ}|_{0_p} |F(u_1) - F(u_2)| d\tau \\
&\leq K'_7(1+l)|p_{01} - p_{02}| \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{0} \exp(\tau(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K'_7(1+l)))d\tau \\
&\leq K'_7(1+l)(\lambda_{N+1} - \lambda_N - K'_7(1+l)^{-1}|p_{01} - p_{02}|
\end{aligned}$$

类似地,有

$$|\mathscr{F}\Phi_1(p_0) - \mathscr{F}\Phi_2(p_0)| \leq L' \| \Phi_1 - \Phi_2 \|$$

其中 $L' = K'_7\lambda_{N+1}^{-1} + K_7(\lambda_N + K'_7(1+l))^{-1}L$.

令 $L \leq l, L' \leq \frac{1}{2}$,则当 $l < \frac{1}{8}$时,且

$$K_{12} \leq \lambda_{N+1}, \quad K_{13} \leq \lambda_{N+1} - \lambda_N \tag{1.79}$$

$\mathscr{F}$映射 $\mathscr{F}_{b,l}$为 $\mathscr{F}_{b,l}$,且具有不动点.定理证毕.

现考虑方程(1.25)的 Galerkin 近似方程

$$\frac{du_M}{dt} + Au_M + P_M F(u_M) = 0 \tag{1.80}$$

其中 $F(u) = \theta_\rho(|Au|)R(u)$,$u_M$ 取值在$P_M D(A)$上.

关于 Garlekin 方程(1.80),有如下定理:

定理 1.9 设定理 1.7 的假设成立,$l>0$ 和 N 满足定理 1.7 的条件,则对每个 $M>N$,方程(1.80)具有一个惯性流形 M_M.它由 Lip 函数 Φ_M 的图构成,

$$\Phi_M: P_M D(A) \to QP_M D(A) \subset QD(A)$$

Φ_M 的 Lip 常数 L 和定理 1.7 中 $\Phi: PD(A) \to QD(A)$的 Lip 常数相同.最后,

$$\| \Phi_M - \Phi \| \leq 2K_6 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} \lambda_{M+1}^{\frac{1}{4}}$$

其中 $\| \Phi_M - \Phi \| = \sup_{p \in PD(A)} | A\Phi_M(p) - A\Phi(p) |$.

§2 惯性流形研究的新进展

我们简要地介绍一下惯性流形和近似惯性流形研究的新进展.

2.1 惯性流形的研究

惯性流形的概念首先由 C. Foias, G. R. Sell 和 R. Temam[1]于 1985 年提出的,它是一个至少为 Lip 连续的有限维流形,在相空间是正不变的,指数地逼近轨线,且含有整体吸引子.

在[1]中研究的是一般的非线性发展方程的初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = f(u)$$
$$u(0) = u_0$$

其中非线性半群$\{S(t)\}$定义在 Hilbert 空间上,为自共轭算子. S. N. Chow 和 K. Lu 1988 年在[2]中考虑一般方程在 Banach 空间上,非线性项 $f \in C^1$,且是有界的,但指数吸引于流形未被证明一致在相空间的有界子集上. Mallet-Paret, Sell 1988 年在[3]中引入空间平均的原则,当谱间隙条件不完全满足时,证明了反应扩散方程惯性流形的存在性. 1988 年 Constantin 等在[4]中,在 Hilbert 空间上用谱垒(spectral barries)的概念企图精确化谱间隙条件. 1990 年 Bernal 在[5]中考虑 Banach 空间的情形,但证明更加复杂,谱间隙条件更为苛刻. 1991 年 Demengel, Ghidaglia 在[6]中,在 Hilbert 空间上当 A 为自共轭算子时,给出 f 为无界时惯性流形存在性的第一个证明. 1993 年 Debussche, Temam[7]给出了实质上为无界的另一种证明. 1990 年 Debussche 在[8]对于一般 Banach 空间, $f \in C^1$,运用 Sacker 方程给予不变流形存在性的另一种证明. 1991 年, Fabes, Luskin, Sell 在[9]中用椭圆型正则化方法构造了惯性流形. 对于 Hilbert 空间上 A 为非自共轭算子,惯性流形存在性的证

明见[10]和[11]. 在 Hilbert 空间中构造惯性流形,关于挤压性和锥条件的研究,在[12]中有很好工作. 早期[13],[14]和[15]对于反应扩散型方程,抛物型方程隐含了惯性流形存在性的证明.

有许多工作是把一般理论应用于某些具体的方程,特别是估计惯性流形的最低维数,例如,KS 方程[16,17];Cahn Hilliard 方程,非局部 Burgers 方程和某些反应扩散方程[4];可压缩气体动力学模型[18];一维反应扩散方程(显式构造惯性流形)[19];Swift-Hohenberg 对流模型[20];Ginzburg-Landau 方程[6];相流方程[21]等.

许多存在性的结果依赖于谱间隙条件的限制,但这个条件是很苛刻的,例如 Navier-Stokes 方程就不满足. 最近 Kwak[22]对于 2D Navier-Stokes 方程具周期边界条件,且沿两个方向周期之比为有理数时,有可能克服这个困难. 他的概念是将原来方程通过非线性因变量的变换,变为一组反应扩散方程组,这个方程组满足谱间隙条件,并且有相同的渐近性质. 利用这个想法,他得到了有限维方程组,且具有相同的渐近性质如同原来的 NS 方程. 显然,反应扩散方程组的惯性流形没有证明横截于流形,因此 NS 方程轨线的指数吸引于有限维不变流形,仍是一个未解决的问题.

惯性流形的新进展主要表现在:

(1)方程的广泛性,谱间隙条件的精确性,惯性流形的完全渐近性;

(2)连续不变叶片(foliation)的存在性,完全轨线的增长特征:$u(t)=O(e^{-\sigma t}),\sigma>0,t\to-\infty$;

(3)C^1 正则性和正规双曲性(normal hyperbolicity);

(4)C^α 正则性.

2.1.1 完全渐近性

惯性流形的完全渐近性,粗略地说,是指系统的每一条轨道被指数吸引到在惯性流形上的某一轨道,两者具有相同的 ω 极限集,限制系统于正不变的惯性流形上称为惯性形式,因此具有完全渐近性的惯性流形,其渐近行为完全由惯性形式所决定.

定义2.1 设 E 为 Banach 空间,M 为惯性流形,$S(t)$为定义

在 E 上的非线性半群，$S(t)u_0=u(t)$，$u_0\in E$，存在 $v_0\in M$，使得

$$|S(t+t_0)u_0-S(t)v_0|_E\leq K(|u_0|_E)e^{-\eta t},\ \forall t\geq 0,$$

其中 $t_0=t_0(|u_0|_E)$，$K(|u_0|_E)$为有界依赖于$|u_0|_E$，$\eta>0$，则称 M 具有完全渐近性(asymptotic completeness property).

考虑发展方程

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}+Au&=f(u)\\ u(0)&=u_0\end{aligned}\tag{2.1}$$

在 Banach 空间 Ξ 上，f 为整体 Lip 连续：$E\to F$，

$$E\subset F\subset\Xi$$

设 $M_1>0$ 为 f 的 Lip 常数，使得

$$|f(u)-f(v)|_F\leq M_1|u-v|_E,\ \forall u,\ v\in E\tag{2.2}$$

设 $-A$ 在Ξ 上形成强连续半群$\{e^{-tA}\}(t\geq 0)$，使得

$$e^{-tA}F\subset E,\ \forall t>0$$

存在两个数列$\{\lambda_n\}_{n\in N}$，$\{\Lambda_n\}_{n\in N}$，$0<\lambda_n\leq\Lambda_n$，$\forall n\in N$，序列$\{P_n\}_{n\in N}$为有限维投影，$Q_n=I-P_n$，使得 $P_n\Xi$ 在 e^{-tA}下不变，$t>0$，$\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$在 $P_n\Xi$ 上能拓展为强连续半群$\{e^{-tA}P_n\}_{t\in R}$，

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}P_n\|_{L(E)}&\leq K_1e^{-\lambda_n t},\ \forall t\leq 0\\ \|e^{-tA}P_n\|_{L(F,E)}&\leq K_1\lambda_n^{\alpha}e^{-\lambda_n t},\ \forall t\leq 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

$Q_n\Xi$ 在 e^{-tA}下正不变，$t\geq 0$，

$$\begin{aligned}\|e^{-tA}Q_n\|_{L(E)}&\leq K_2e^{-\Lambda_n t},\ \forall t\geq 0\\ \|e^{-tA}Q_n\|_{L(F,E)}&\leq K_2(t^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha})e^{-\Lambda_n t},\ \forall t>0\end{aligned}\tag{2.4}$$

其中 $K_1,K_2\geq 1$，$0\leq\alpha<1$.

设方程在 E 中具有连续半流$\{S(t)\}_{t\geq 0}$，$S(t)u_0=u(t)$，$u(t)$为(2.1)的中等程度解

$$u(t)=e^{-tA}u_0+\int_0^t e^{-(t-s)A}f(u(s))ds,\ \forall t\geq 0$$

设$(t,u_0)\to S(t)u_0$ 为连续的：$[0,\infty)\times E\to E$.置

$$\gamma_\alpha = \int_0^\infty e^{-r} r^{-\alpha} dr, \text{ 如果 } 0 < \alpha \leq 1$$

$$\gamma_\alpha = 0, \text{ 如果 } \alpha = 0$$

定理2.2 在上述假定下，如对某个 $n \in N$，如下谱间隙条件满足

$$\Lambda_n - \lambda_n > 3N_1K_1K_2\lambda_n^\alpha + 3M_1K_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda_n^\alpha \quad (2.5)$$

则由方程(2.1)形成的半流 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 具有一个惯性流形，$M = \text{graph}\Phi$，$\Phi: P_nE \to Q_nE$ 是 Lip 连续的，且其 Lip 常数 <1，M 是正的和负的不变流形.

进一步，M 具有完全渐近性质，即对任何 $u_0 \in E$，存在 $v_0 \in M$，使得

$$|S(t)u_0 - S(t)v_0|_E \leq K_\eta(|u_0|_E)e^{-\eta t}, \ \forall t \geq 0 \quad (2.6)$$

其中 η 满足

$$0 < \eta < \Lambda_n - 2M_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda_n^\alpha \quad (2.7)$$

K_η 依赖于 η 和 $|u_0|_E$.

附注2.3 定理 2.1 包含了主要结果，但由它的假设，可得到更多的信息，例如，我们可得到：作为惯性流形的特征之一，它可作为所有轨线的并，这些轨线有界于 $e^{-\sigma t}$，$t \to -\infty$，$\sigma > 0$. 我们也可得到 E 的连续叶片结构的存在性，$E = \sum_{v_0 \in M} N_{v_0}$，其中每一叶 N_{v_0} 为 Lip 函数从 Q_nE 到 P_nE 的图，具有特征

$$N_{v_0} = \{u_0 \in E, |S(t)u_0 - S(t)v_0|_E = O(e^{-\eta t}), t \to +\infty\}$$

$\eta > 0$. 我们也得到连续收缩映射 π 的存在性，$\pi: E \to M$，$\pi u_0 = N_{u_0}$，$S(\cdot)\pi u_0$ 为 M 的唯一轨线，使得

$$|S(t)u_0 - S(t)\pi u_0|_E = O(e^{-\eta t}), \ t \to +\infty \ \ \eta > 0$$

这就给出了 M 的完全渐近性.

更多的情况是非线性项 f 仅在某个有界集上满足 Lip 条件，设

$$|f(u) - f(v)|_F \leq d_1(r)|u - v|_E$$

$$|f(u)|_F \leq d_0(r) \quad u, v \in B_E(r) \tag{2.8}$$

其中 $B_E(r)=\{u\in E, |u|_E\leq r\}$，此时我们也设在 E 中存在 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的吸收集 β，即 $\beta\subset E$ 是有界的，使得对任何有界集 $B\subset E$，存在 $t_0>0$，使得

$$S(t)B\subset\beta, \ \forall t\geq t_0$$

古典的概念是置换(2.1)为"截断"方程，应用定理 2.1 于这种方程，然后证明这样选取的方程具有如(2.1)相同的长时间动力学性质.

设函数 $Q(s)\in C^1$，$s\in[0,\infty)$，它在$[0,1]$上为 1，在$[2,\infty)$为 0，且$|Q'(s)|\leq 2$，$\forall s\geq 0$. 置换 f 为

$$f_\theta(u)=\theta\left(\frac{|u|_E^2}{\rho^2}\right)f(u), \quad \forall u\in E,$$

于(2.1)中得到截断方程，其中 $\rho>0$，使得 $\bar{\beta}\subset B_E(\rho)$，$\bar{\beta}$ 表示 β 在 E 中的闭包.

截断方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f_\theta(u)$$

$$u(0)=u_0$$

在 E 中定义连续半流 $\{S_\theta(t)\}_{t\geq 0}$，可得

定理2.4 在上述假设下，如对某个 $n\in N$，如下的谱间隙条件满足：

$$\Lambda_n-\lambda_n>3M_1K_1K_2\lambda_n^2+3M_1K_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda_n^\alpha \tag{2.9}$$

其中 $M_1=d_1(\sqrt{2}\rho)+4\sqrt{2}d_0(\sqrt{2}\rho)/\rho$，则方程(2.1)具有惯性流形 M，它是 Lip 函数 Φ 的图，$\Phi: P_nE$ 的一个开集 $O\to Q_nE$.

进一步，M 具有完全渐近性，即对任何 $u_0\in E$，存在 $v_0\in M$，使得

$$\left|S(t+t_0)u_0-S(t)v_0\right|_E\leq \mathrm{e}^{-\eta t}, \ \forall t\geq 0$$

其中

$$0<\eta<\Lambda_n-2M_1K_2(1+\gamma_\alpha)\Lambda_n^\alpha$$

t_0 依赖于 η 和 $|u_0|_E$.

定理 2.2 证明的思路:引入空间

$$F_\sigma = \{\varphi, \in C((-\infty,0],E);\ \|\varphi\|_F = \sup_{t\leq 0}(e^{\sigma t}|\varphi(t)|_E) < \infty\}$$

对于 $\varphi\in F_\sigma, y\in PE$,定义映射

$$J(\varphi,y)(t) = e^{-tA}Py - \int_t^0 e^{-(t-s)A}P(f(\varphi(s)))ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Qf(\varphi(s))ds \qquad (2.10)$$

对于适当的 σ,函数 $\varphi\in F_\sigma$ 为(2.1)的解,当且仅当 φ 为 J 的不动点,为此要证明映照 $J:F_\sigma\times PE\rightarrow F_\sigma$ 对于 PE 是一致严格压缩的,因此存在映照 $\varphi:PE\rightarrow F_\sigma$,使得 $J(\varphi(y_0),y_0)=\varphi(y_0)$, $\forall y_0\in PE$, $\varphi(y_0)$为(2.1)的解.

定义映照 $\Phi:PE\rightarrow QE$,因此

$$\Phi(y_0) = Q\varphi(y_0)(0) = \int_{-\infty}^0 e^{sA}Qf(\varphi(y_0)(s))ds$$

$$\varphi(y_0)(0) = y_0 + \Phi(y_0)$$

可检验 $M=\text{graph}\Phi$ 是 Lip 连续的不变流形,且是完全渐近的,M 为惯性流形.

M 是完全渐近的:设 $u_0\in E$, $v_0=y_0+z_0$, $y_0\in PE$, $z_0\in QE$. 考虑差 $\psi=S(t)v_0-S(t)u_0$, $t\geq 0$,则

$$\psi(t) = e^{-tA}(z_0 - Qu_0) + \int_0^t e^{-(t-s)A}Q[f(S(s)u_0+\psi(s)) - f(S'(s)u_0)]ds - \int_t^{+\infty} e^{-(t-s)A}P[f(S(s)u_0+\psi(s)) - f(S(s)u_0)]ds \qquad (2.11)$$

定义空间 $G_\sigma=\{\psi\in C([0,\infty),E):\ \|\psi\|_{G_\sigma}=\sup_{t\geq 0}(e^{\alpha t}\cdot|\psi(t)|_E)<\infty\}$,在空间 G_σ 上定义映照 $W(\psi,u_0,z_0)(t)$恒等于(2.11)式的右端. 可以证明当 σ 满足

$$\lambda_N+2M_1K_1\lambda_N^\alpha<\sigma<\Lambda_N-2M_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda_N^\alpha \qquad (2.12)$$

$W(\psi, u_0, z_0)$为严格压缩的,即存在映照 $\psi: E \times QE \to G_\sigma$,使得

$$W(\psi(u_0, z_0), u_0, z_0) = \psi(u_0, z_0), \ \forall u_0 \in E, \forall z_0 \in QE$$

再定义映照 $\Psi_{u_0}: QE \to PE$,对 $u_0 \in E$,

$$\Psi_{u_0}(z_0) = Pu_0 + P\psi(u_0, z_0)(0), \ \forall z_0 \in QE$$

$N_{u_0} = \text{graph}\,\Psi_{u_0}, \forall u_0 \in E$,则有

$$\Psi_{u_0}(z_0) = Pu_0 - \int_0^{+\infty} e^{sA} P[f(S(s)(\psi_{u_0}(z_0) + z_0)) - f(S(s)u_0)]ds$$

$$N_{u_0} = \{v_0 \in E; | S(t)v_0 - S(t)u_0 |_E = O(e^{-\sigma t}), t \to +\infty\}$$

由此可以证明映照 $\pi: u_0 \to v_0 \in M \cap N_{u_0}, \pi u_0 = v_0$,

$$|S(t)u_0 - S(t)\pi u_0|_E \leq K_\eta(|u_0|_E)e^{-\eta t}, \ \forall t \geq 0$$

且有 $E = \bigcup_{u_0 \in M} N_{u_0}, S(t)N_{u_0} = N_{S(t)u_0}, \quad \forall t \geq 0$,

$$S(t) \cdot \pi = \pi \cdot S(t), \quad \forall t \geq 0$$

2.1.2 惯性流形的正则性和正规双曲性

定理2.5 如 $f \in C^1(E, F)$,则在定理 2.2 中给出的惯性流形属于 C^1,Φ 满足 Sacker 方程

$$D\Phi(y)(-Ay + P_n f(y + \Phi(y))) + A\Phi(y) = Q_n f(y + \Phi(y)) \tag{2.13}$$

相同的结果对于定理 2.4 的假定和 $f_\theta \in C^1(E, F)$也是成立的.

证明思路:置 $\varphi(y)(t) = \varphi(y, t), y \in PE, t \leq 0$,

$$\varphi: PE \to F_\sigma, \ \Phi(y) = P\varphi(y, 0)$$

$$\varphi(y, t) = e^{-tA}Py - \int_t^0 e^{-(t-s)A} Pf(\varphi(y, s))ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} Qf(\varphi(y, s))ds \tag{2.14}$$

(2.14)对 y 作形式微分,可看出$\partial_y \varphi(y)$是如下映照 J_1 的不动点:

$$J_1(\Delta,y)(t)=e^{-tA}P-\int_t^0 e^{-(t-s)A}PDf(\varphi(y,s))\Delta(s)ds$$
$$+\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}QDf(\varphi(y,s))\Delta(s)ds \tag{2.15}$$

可以证明在 σ 满足条件(2.12)下，J_1 关于 Δ 是严格压缩的，因而有

(i) $J_1(\Delta(y),y)=\Delta(y)$，$\forall y\in PE$；

(ii) $\Delta(y)$是连续的；

(iii) $\partial_y\varphi(y)=\Delta(y)$，

因 $E=\bigcup\limits_{u_0\in M}N_{u_0}$，故有

定理2.6 设 $f\in C^1(E,F)$，则每个叶片 $N_{u_0}\in C^1$，更详细地说，对于一切 $u_0\in E$，有 $\Psi_{u_0}(z_0)\in C^1(QE,PE)$，且映照$(u_0,z_0)\to D\Psi_{u_0}(z_0)$是连续的：$E\times QE\to L(QE,PE)$.

因 Φ 和 $\Psi_{u_0}\in C^1$，考虑切空间

$$T_{u_0}M=\{\eta+D\Phi(Pu_0)_\eta;\eta\in PE\}$$
$$T_{u_0}N_{u_0}=\{\zeta+D\Psi_{u_0}(Q_{u_0})\zeta;\zeta\in QE\},\quad u_0\in M$$

则有

$$E=T_{u_0}M\oplus T_{u_0}N_{u_0},\quad \forall u_0\in M$$

定义切丛和法丛：

$$\begin{aligned}TM&=\{(u,\mu)\in E\times E;u\in M,\mu\in T_uM\}\\ NM&=\{(u,\mu)\in E\times E;u\in M,\mu\in N_uM\}\end{aligned}\tag{2.16}$$

其中 $N_uM=T_uN_u$.

考虑方程(2.1)及其一次变分

$$\begin{aligned}&\frac{du}{dt}+Au=f(u)\\ &\frac{d\mu}{dt}+A\mu=Df(u)\mu\\ &u(0)=u_0,\ \mu(0)=\mu_0\end{aligned}\tag{2.17}$$

定理2.7 惯性流性 M 是正规双曲的,即切丛 TM 在(2.17)下是负不变的,且有

$$|\mu(t)|_E \leq 2K_1^2|\mu_0|_E e^{-(\lambda+2MK_1\lambda^\alpha)t}, \forall t \leq 0 \quad (2.18)$$

其中$(u_0,\mu_0)\in TM$,法丛 NM 在(2.17)下是正不变的,且有

$$|\mu(t)|_E < 2K_2^2\frac{1+l'}{1-l'}|u_0|_E e^{-(\Lambda-2M_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda^\alpha)t}, \ \forall t \geq 0 \quad (2.19)$$

其中$(u_0,\mu_0)\in NM, l'<1$,且由谱间隙条件有

$$\lambda + 2MK_1\lambda^\alpha < \Lambda - 2M_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda^\alpha \quad (2.20)$$

2.1.3 高阶正则性

定理2.8 设定理 2.2 的条件满足,设 $f\in C^{j,\nu}(E,F), j=1,2,\cdots,k, 0\leq\nu\leq 1, k\in N$,所有导数 D^jf 一致有界,整体 Holder 连续,具指数 ν,如果如下的强谱间隙条件满足

$$\Lambda_n - 2M_1K_1(1+\gamma\alpha)\Lambda_n^\alpha \geq (k+\nu)(\lambda_n + 2M_1K_1\lambda_n^\alpha) \quad (2.21)$$

则惯性流形 $M=\mathrm{graph}\Phi, \Phi\in C^{j,\nu}(PE,QE), j=1,2,\cdots,k$.

证明的思路:引入空间

$$F_{k,\sigma}=\{\Delta\in C((-\infty,0];M_k^s(PE,E)):$$
$$\|\Delta\|_{F_{k,\sigma}}=\sup_{t\leq 0} e^{k\sigma t}\|\Delta(t)\|_{M_k^s(PE,E)}<+\infty\}$$

其中 $M_k^s(PE,E)$表示一切连续对称 k 线性映照:$PE\to E$.在定理 2.8 的假定,以及 σ 满足条件

$$\Lambda - 2M_1K_2(1+\gamma\alpha)\Lambda^\alpha > k\sigma > \sigma > \lambda + 2M_1K_1\lambda^\alpha$$

下存在$\partial_y^j\varphi\in F_{j,\sigma}(j=1,\cdots,k)$,其中 $\varphi(y)$为 $T(\cdot,y)$的不动点

$$\varphi(y) = J(\varphi(y),y),$$

上式对 y 作微分,使得$\partial_y^k\varphi(y)$为如下 $J_k(\cdot,y)$的不动点:

$$J_k(\Delta;y)(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)A}P[G(y,s)+Df(\varphi(y,s))\Delta(s)]ds$$
$$+\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A}Q[G(y,s)+Df(\varphi(y,s))\Delta(s)]ds$$

其中 $\Delta\in F_{k,\sigma}$, $G=G(y,s)$包含有 φ 对 y 的 $k-1$ 次导数. 由归纳法可证

(i) J_k 是严格压缩的,存在函数 $\Delta: PE\to F_{k,\sigma}$,满足 $J_k(\Delta(y), y)=\Delta(y)$, $\forall y\in PE$;

(ii) $\Delta(y)$是连续的;

(iii) $\partial_y^k\varphi(y)=\Delta(y)$;

(iv) $\| D^j\Phi(y_1)-D^j\Phi(y_2)\|_{L(PE,QE)}\leq C|y_1-y_2|_E^{\nu}$, $j=1,2,\cdots,k$.

定理2.9 设定理 2.8 的条件满足,特别强谱间隙条件(2.21)满足,则叶片 $N_{v_0}=\mathrm{graph}\Psi_{v_0}$, $\Psi_{v_0}\in C^{j,\nu}(QE,PE)$, $j=1,2,\cdots,k$, $v_0\in E$.

2.2 近似惯性流形的研究

1987 年 C. Foias, O. Manely, R. Temam 在[23]中首次提出了近似惯性流形的概念,这些流形不要求满足谱间隙条件,它比原来的惯性流形更低维度,而且易于构造,近似惯性流形(AIM)要求有限时刻之内原方程的任何轨线进入它的邻域. 当这个方程具有整体吸引子时,吸引子要求被包含在这个流形的邻域. 我们说 AIM 是 η 阶的,是指相连的邻域是 η 阶的.

大量的数值结果由构造许多方程的 AIM 得到,如:[24]~[29],某些新的计算格式有[30],[31].

对于 AIM,经典地构造出一系列流形,它们的维数为 n,对于第 j 个流形,轨线进入邻域的宽度为

$$\frac{K_j}{\lambda_n^{jr}} \tag{2.22}$$

其中 λ_n 为方程线性部分的第 n 个特征值, $r>0$. 在[29]中得到的宽度为

$$K(2^{-j}+\mathrm{e}^{-\delta\lambda n}) \tag{2.23}$$

且不像其它构造,流形可以不是图.

一个自然的问题是:在谱间隙条件下,这些近似惯性流形的序

列是否收敛于真正的惯性流形？(2.22)所提供的界是无用的，因为当 $j\to\infty$ 时，常数 K_j 以快于 λ_n^j 的速度很快地增长.(2.23)的界比(2.22)有了改善，因为当 $j\to\infty$ 时，减少到 $Ke^{-\delta\lambda_n}$.[32]首次证明了近似惯性流形的收敛性.他们的想法是：运用构造近似惯性流形的 Lyapunov-Perron 方法考虑算子的迭代，构造一个显式流形 $\{M_N\}_{N\in N}$，证明它们是通常意义下的 AIM.方程的吸引子(如果它存在)被包含 M_n 的邻域中，这个邻域的宽度为

$$K'(\varepsilon(N)+e^{-C\lambda_n^{1-\alpha}}) \tag{2.24}$$

其中 $C>0$，n 为 M_N 的维数，$0<\alpha<1$，$\varepsilon(N)\leq e^{-C\lambda_n^{1-\alpha}}$.当谱间隙条件满足时，证明上述 AIM 序列依 C^1 拓扑收敛于真正的惯性流形.

还有一种完全不同的近似方法也是有用的，它不管惯性流形是否存在，即指数吸引子或称惯性集.可参见[33]~[35].

2.2.1 AIM 的构造

设有非线性发展方程初值问题

$$\frac{du}{dt}+Au=f(u)$$
$$u(0)=u_0 \tag{2.25}$$

其中 A 为线性稠定算子，$f\in C^1$，$E\subset F\subset \Xi$，E,F,Ξ 均为 Banach 空间.定理 2.2 的假定满足.构造惯性流形的 Lyapunov-Perron 方法为寻求函数 ψ 为如下映照 J 的不动点：

$$J\psi(y_0)=\int_{-\infty}^{0}e^{As}Q_nf(y(s)+\psi(y(s)))ds \tag{2.26}$$

其中 y 为如下问题的解：

$$\frac{dy}{dt}+Ay=P_nf(y+\psi(y))$$
$$y(0)=y_0 \tag{2.27}$$

映照 J 定义如下集合上：

$$F_{l,b}=\left\{\psi:P_nE\to Q_nE:\mathrm{Lip}\psi<l,\sup_{y\in P_nE}\frac{|\psi(y)|_E}{1+|y|_E}\leq b\right\}$$

假定 $(\Lambda_n-\lambda_n)/(\Lambda_n^\alpha+\lambda_n^\alpha)$充分大

定理2.10 假设存在常数 C_0,它依赖于 f,k_1,k_2,l 和 b,使得

$$\Lambda_n-\lambda_n\geq C_0(\Lambda_n^\alpha+\lambda_n^\alpha)\tag{2.28}$$

则映照 $J:F_{l,b}\to F_{l,b}$,且是严格压缩的,它的不动点的图是方程(2.1)的 C^1 惯性流形.

首先选取时间步长 τ 和正整数N,近似(2.27)的解

$$y_{k+1}=R_\tau y_k+S_\tau P_nf(y_k+\psi(y_k))\tag{2.29}$$

其中 $k=0,1,\cdots,N-1$. 现考虑(2.26)的右端,其中函数 $y=y(s)$ 置换为常数,且在区间$(-(k+1)\tau,-k\tau]$, $k=0,\cdots,N-1$ 或 $(-\infty,-N_\tau]$, $k=N$,它等于 y_k. 则可得到映照 J 的近似J_N^τ:

$$\begin{aligned}J_N^\tau\psi(y_0)&=A^{-1}(I-\mathrm{e}^{-A\tau})\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-kA\tau}Q_nf(y_k+\psi(y_k))\\&\quad+A^{-1}\mathrm{e}^{-NA\tau}Q_nf(y_N+\psi(y_N))\end{aligned}\tag{2.30}$$

其中$(y_k)_{k=0,1,\cdots,N}$由(2.29)计算,R_τ,S_τ 为线性算子,满足

$$|R_\tau P_n|_{L(E)}\leq\mathrm{e}^{2\lambda_n}\tag{H_1}$$

$$|S_\tau P_n|_{L(F,E)}\leq K_3\lambda_n^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)\tag{H_2}$$

为了使(2.29)和(2.27)一致,对于 $\psi\in F_{l,b}$, $y_0\in P_nE$, y 为(2.27)的解,令 $y_{\widetilde{k}+1}=y(-k,\tau)$,设

$$y_{\widetilde{k}+1}=R_\tau\widetilde{y}_k+s_\tau P_nf(u(-k,\tau))+\varepsilon_k$$

$$|\varepsilon_k|_E\leq\tau^2\beta_1,k\leq N\tag{H_3}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_E\leq\beta_2,\forall\ t\leq0\tag{H_4}$$

其中 $y=P_nu$, $\widetilde{y}_k=y(-k\tau)=Pu(-k\tau)$, β_1,β_2 不依赖于 N,τ 和 n.

构造 AIM,取正数序列$\{\tau_N\}_{N\in\mathcal{N}}$,定义$\{\Phi_N\}_{N\in\mathcal{N}}$如下:

$$\Phi_0=0$$

$$\Phi_{N+1} = J_N^{\tau_N}(\Phi_N),\ N \geq 0 \qquad (2.31)$$

其中 J_0^τ 定义为

$$J_0^\tau \Phi(y_0) = A^{-1} Q_n f(y_0 + \Phi(y_0))$$

定义 $M_n = \mathrm{graph}\Phi_N$，则有

定理2.11 设以上假设满足，序列 $\{\tau_N\}$ 满足

$$C_6 \leq \tau_N(N+1)\lambda_n^\alpha \leq C_1, \forall N,$$

则 $\{\Phi_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ 满足

$$\max_{u=y+z \in A} |\Phi_N(y) - z|_E \leq (C_3 \Lambda_n^{\alpha-1})^N \max_{u \in A} |Q_n u|_E$$
$$+ C_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2 + \Lambda_n^{-1}\beta_1) \sum_{j=0}^{N-1} (C_3 \Lambda_n^{\alpha-1})^j \tau_{N-1-j}$$
$$+ 4C_5 \Lambda_n^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-C_6 \Lambda_n^{1-\alpha}},$$

其中 A 为方程(2.25)的吸引子.

定理2.12 在上述假设下，如存在常数 C_8 使得

$$\Lambda_n - \lambda_n \geq C_\delta(\Lambda_n^\alpha + \lambda_n^\alpha),$$

则对任何 N 和 $\tau > 0$，J_N^τ 映照 $F_{l,b}$ 为自己且是严格压缩的，其压缩常数 $< \frac{1}{2}$，且当 $N_{\tau_N} \to \infty (N \to \infty)$ 时，$\{\Phi_N\}_{N \in \mathcal{N}}$ 依 $|\cdot|_\infty$ 收敛于 Φ，其中

$$|\psi|_\infty = \sup_{y \in P_n E} \frac{|\psi(y)|_E}{1 + |y|_E}.$$

定理 2.13 如 f 具有紧支集，Df 为一致连续，则序列 $\{\Phi_N\}_{N \in \mathcal{N}}$，当 $\tau_N \to 0$，$N_{\tau_N} \to \infty$ 时，依 C^1 模收敛于 Φ.

最近在[36]中，令 $w = \nabla \times u$，改写 NS 动量守恒方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\Delta u + w \times u + \nabla P = f, \qquad (2.32)$$

$P = p + \frac{1}{2}|u|^2$，可得到更好的 AIM 计算结果.

第二章　近似惯性流形(AIM)

对于大量的耗散型方程，由于谱间隙条件不能被满足，因此惯性流形的存在性问题一直未能解决. 这样，近似惯性流形(以下简记 AIM)的存在性以及其构造问题就自然地被提了出来. 所谓近似惯性流形是指一类非线性有限维且具有一定光滑性的充分逼近于整体吸引子的流形. 它的研究对探讨耗散型方程解的长时间行为和吸引子的结构具有重要意义.

本章给出不同耗散条件下近似惯性流形的不同构造方法，其中包括惯性流形存在条件下近似惯性流形的构造，平坦近似惯性流形，解具有不同光滑性时近似惯性流形的构造、非自治耗散方程近似惯性流形的构造，同时介绍了具有 Gevrey 类正则性的指数型逼近于吸引子的近似惯性流形.

本章主要内容可参考[24]～[28]，[36]～[76]，[121]～[124].

§1　惯性流形的逼近流形

本节我们研究如下一类非线性发展方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+R(u)=0 \tag{1.1}$$

$$u(0)=u_0 \tag{1.2}$$

其中 A 是无穷维 Hilbert 空间 H 上线性无界自共轭正算子，A^{-1} 是紧算子，从而 A 的特征函数 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ 构成 H 空间一组正交基，相应的特征值记为 λ_j，λ_j 满足 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$，当 $j\to\infty$ 时有 $\lambda_j\to+\infty$；$R(\cdot)$是 $D(A)$ 到 $D(A^{1-\beta})$ 的非线性可微映射. $0\leqslant\beta<1$，$D(A)\subset H$ 且在 H 中稠密. 此外，$R'(u)$满足如下估计：

$$|R'(u)v| \leqslant M_0(|Au|)|A^{\beta}v|, \ \forall\, u,v \in D(A) \tag{1.3}$$

$$|A^{1-\beta}R'(u)v| \leqslant M_1(|Au|)|Av|, \ \forall\, u,v \in D(A) \tag{1.4}$$

其中 $M_k(k=0,1)$是给定的单调递增正函数.

我们假设对每个 $u_0 \in D(A)$,问题(1.1)~(1.2)有唯一整体解 $S(t)u_0$,且 $S(t)u_0 \subset D(A)$, $\forall\, t \geqslant 0$;同时关于 t 和 u_0 连续. 又设存在正实数 ρ_0 使得空间 $D(A)$中以原点为中心,ρ_0 为半径的球 $B_{\rho_0}^{D(A)}(0)$是吸收的,即对每个 $r>0$,存在 $T>0$,当 $t \geqslant T$ 时有 $S(t)B_r^{D(A)}(0) \subseteq B_{\rho_0}^{D(A)}(0)$. 吸收集的存在性使我们可像第一章那样引入截断函数 $\theta: R^+ \to [0,1]$,有当 $0 \leqslant s \leqslant 2$ 时,$\theta(s)=1$,而当 $s \geq 4$ 时,$\theta(s)=0$ 且 $\theta(s) \in C^1(R_+)$. 固定 $\rho = 2\rho_0$,定义 $\theta_\rho(s) = \theta(s/\rho^2)$,由此将(1.1)修正为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + F(u) = 0 \tag{1.5}$$

其中 $F(u) = \theta_\rho(|Au|^2)R(u)$.

我们用 P_m 表示 H 到 $H_m := \mathrm{span}\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$的投影且记 $Q_m = I - P_m$.

我们仍用 $S(t)$表示由(1.5)生成的解算子.

命题1.1 由(1.5)所给出的 $F(u)$满足下列估计:

$$|A^{1-\beta}F(u)| \leqslant K_1, \ \forall\, u \in D(A) \tag{1.6}$$

$$|A^{1-\beta}F'(u)v| \leqslant K_2|Av|, \forall\, u,v \in D(A) \tag{1.7}$$

$$|A^{1-\beta}(F(u_1) - F(u_2))| \leqslant K_2|A(u_1 - u_2)|, \ \forall\, u_1,u_2 \in D(A) \tag{1.8}$$

其中

$$K_1 = K_1(\beta,\rho) = |A^{1-\beta}R(0)| + M_1(2\rho)2\rho$$

而

$$K_2 = K_2(\beta,\rho) = M_1(2\rho) + 8K_1(\beta,\rho)\rho^{-1}$$

证明 由 $F(u)$的定义,有

$$|A^{1-\beta}F(u)| = \begin{cases} |A^{1-\beta}R(u)| & \text{如}\, |Au| \leqslant 2\rho \\ 0 & \text{如}\, |Au| > 2\rho \end{cases}$$

利用中值定理和(1.4),同时利用 $M_1(\cdot)$的单增性,我们得到

$$|A^{1-\beta}F(u)|\leqslant\begin{cases}|A^{1-\beta}R(0)|+M_1(2\rho)|Au| & \text{如果}|Au|\leqslant 2\rho\\ 0 & \text{如果}|Au|>2\rho\end{cases}\tag{1.9}$$

这就推出(1.6).

为证(1.7),我们仅须考虑两种情形:

(1) $|Au|<\sqrt{2}\rho$,这时我们有 $F(u)=R(u)$,于是

$$|A^{1-\beta}F'(u)v| = |A^{1-\beta}R'(u)v|\leqslant M_1(2\rho)|Av|\leqslant K_2|Av|\tag{1.10}$$

(2) $\sqrt{2}\rho\leqslant|Au|\leqslant 2\rho$,这时有

$$\begin{aligned}A^{1-\beta}F'(u)v &= \theta'\left(\frac{|Au|^2}{\rho^2}\right)\cdot\rho^{-2}\cdot 2(Av,Au)A^{1-\beta}R(u)\\ &\quad+\theta\left(\frac{|Au|^2}{\rho^2}\right)A^{1-\beta}R'(u)v\end{aligned}$$

利用(1.4)和函数 θ 的性质,得到

$$\begin{aligned}|A^{1-\beta}F'(u)v| &\leqslant 8\rho^{-1}|Av||A^{1-\beta}R(u)|+M_1(|Au|)|Av|\\ &\leqslant 8\rho^{-1}K_1|Av|+M_1(2\rho)|Av| = K_2|Av|\end{aligned}\tag{1.11}$$

结合(1.10)和(1.11)我们得到(1.7).

最后利用中值定理从(1.7)立得(1.8).证毕.

利用与第一章完全相同的符号和技巧,可以证明如下定理.

定理1.2 设 N 充分大使得

$$\lambda_{N+1}-\lambda_N\geqslant\max\{2l^{-1}(1+l)K_2(1-\beta)^{-1},bK_1^{-1}\}(\lambda_{N+1}^{\beta}+\lambda_N^{\beta})\tag{1.12}$$

则(1.1)~(1.2)存在函数 $\phi(p)\in\mathscr{F}_{b,l}$,且 graph$\phi(p)$是一个惯性流形.

现在,我们给出惯性流形的一个逼近流形.

对任何整数 $M>N$,研究(1.1)的下列 Galerkin 逼近:

$$\frac{\mathrm{d}u_M}{\mathrm{d}t}+Au_M+P_MF(u_M)=0\tag{1.13}$$

其中 $u_M = P_M u$.

由第一章第 1 节知,(1.13)有与(1.1)相同的性质即存在解算子 $S_M(t)$ 和惯性流形 graph(ϕ_M),其中 $\phi_M: P_N D(A) \to Q_N P_M D(A) \subset Q_N D(A)$, $\phi_M \in \mathscr{F}_{b,l}$,且有如下误差估计:

$$\| \phi_M - \phi \| \leqslant 2K_1[(1-\beta)e^{\beta}\lambda_{M+1}^{1-\beta}]^{-1} \qquad (1.14)$$

其中 $\| \phi_M - \phi \| = \sup_{p \in P_N D(A)} |A(\phi_M(p) - \phi(p))|$.

取定 $b = \rho_0/4, 0 < l \leqslant \frac{1}{32}$. 我们有

定理1.3 设 N 满足(1.12), $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$,则对任何 $t_0 \geqslant 0$,下面结论成立.

$$\begin{aligned} &|AQ_N(S_M(t_0)p_1 - S_M(t_0)p_2)| \\ &\leqslant l\,|AP_N(S_M(t_0)p_1 - S_M(t_0)p_2)| \qquad (1.15) \\ &\qquad \text{对任何 } p_1, p_2 \in H_N \end{aligned}$$

如果对某个 $p_1 \in H_N$; $|AP_N S_M(t_0)p_1| > 4\rho$,则有

$$Q_N S_M(t_0) p_1 = 0 \qquad (1.16)$$

$$|AQ_N S_M(t_0)p_1| \leqslant b, \text{ 对任何 } p_1 \in H_N \qquad (1.17)$$

$$P_N S_M(t_0) H_N = H_N \qquad (1.18)$$

因此,存在一个函数 $\psi_{t_0,M} \in \mathscr{F}_{b,l,M}$ 使得

$$\text{graph}(\psi_{t_0,M}) = S_M(t_0) H_N$$

其中 $\mathscr{F}_{b,l,M} = \{\psi \in \mathscr{F}_{b,l}, \psi: P_N D(A) \to Q_N P_M D(A)\}$

证明 设 $p_1, p_2 \in H_N$,令 $u_k(t) = S_M(t)p_k, k = 1,2, g(t) = Q_N(u_1(t) - u_2(t))$ 和 $p(t) = P_N(u_1(t) - u_2(t))$

对于 $t_0 = 0$,(1.15)显然成立. 因此如果对某个 $\tilde{t}_0 \geqslant 0$ 我们有 $|Aq(\tilde{t}_0)| = l\,|Ap(\tilde{t}_0)|$,则我们仅需要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Aq(t)|^2 - l^2|Ap(t)|^2)\Big|_{t=\tilde{t}_0} \leqslant 0 \qquad (1.19)$$

从(1.13)我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p + Ap + P_N(F(u_1) - F(u_2)) = 0 \qquad (1.20)$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q + Aq + Q_N P_M(F(u_1) - F(u_2)) = 0 \qquad (1.21)$$

将(1.20)与 $A^2 p$ 取内积,我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Ap|^2 \geqslant -|A^{3/2}p|^2 - |(A^{1-\beta}(F(u_1) - F(u_2)), A^{1+\beta}p)|$$

利用(1.8),

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Ap|^2 \geqslant -|A^{3/2}p|^2 - K_2(|Ap| + |Aq|)|A^{1+\beta}p|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Ap|^2 \geqslant -|A^{3/2}p|^2 - K_2(|Ap| + |Aq|)\lambda_N^{\beta}|Ap| \qquad (1.22)$$

将(1.21)与 $A^2 q$ 取内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Aq|^2 \leqslant -|A^{3/2}q|^2 + |(A^{1-\beta}(F(u_1) - F(u_2)), A^{1+\beta}q)|$$

又利用(1.8),得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Aq|^2 \leqslant -|A^{3/2}q|^2 + K_2(|Ap| + |Aq|)|A^{1+\beta}q| \qquad (1.23)$$

从(1.22)和(1.23)我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Aq|^2 - l^2|Ap|^2)\\ &\leqslant -|A^{3/2}q|^2 + l^2|A^{3/2}p|^2 + K_2(|Ap|\\ &\quad + |Aq|)(|A^{1+\beta}q| + l^2\lambda_N^{\beta}|Ap|)\end{aligned}$$

我们代入 $t = \tilde{\tau}_0$ 和 $|Aq(\tilde{\tau}_0)| = l|Ap(\tilde{\tau}_0)|$,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Aq|^2 - l^2|Ap|^2)\bigg|_{t=\tilde{\tau}_0}\\ &\leqslant \left[-|A^{3/2}q|^2 + l^2|A^{3/2}p|^2 + K_2\left(\frac{1}{l} + 1\right)|Aq|\right.\\ &\quad \left.\cdot(|A^{1+\beta}q| + l\lambda_N^{\beta}|Aq|)\right]\bigg|_{t=\tilde{\tau}_0}\end{aligned}$$

$$\leqslant |Aq|\Big[-\lambda_{N+1}^{1/2}|A^{3/2}q|+\lambda_N|Aq|$$

$$+K_2\Big(\frac{1}{l}+1\Big)(|A^{1+\beta}q|+l\lambda_N^{\beta}|Aq|)\Big]\Big|_{t=\widetilde{t}_0}$$

由于我们假设 $\beta\leqslant\frac{1}{2}$,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|Aq|^2-l^2|Ap|^2)\Big|_{t=\widetilde{t}_0}$$

$$\leqslant |Aq|\Big[-\lambda_{N+1}^{1-\beta}|A^{1+\beta}q|+\lambda_N\lambda_{N+1}^{-\beta}|A^{1+\beta}q|$$

$$+K_2\Big(\frac{1}{l}+1\Big)(|A^{1+\beta}q|+l(\lambda_N\lambda_{N+1}^{-1})^{\beta}|A^{1+\beta}q|\Big]\Big|_{t=\widetilde{t}_0}$$

$$\leqslant (|Aq|\,|A^{1+\beta}q|\,|_{t=\widetilde{t}_0})\Big(-\lambda_{N+1}+\lambda_N$$

$$+K_2\Big(\frac{1}{l}+1\Big)(1+l)\lambda_{N+1}^{\beta}\Big)\lambda_{N+1}^{-\beta}$$

利用(1.12)注意取 $0<l\leqslant\frac{1}{32}$,我们推得(1.19).

设对某个 $p_1\in H_N$, $|AP_NS_M(t_0)p_1|>4\rho$,由(1.13)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P_NS_M(\tau)p_1\Big|_{\tau=t_0}+AP_NS_M(t_0)p_1=0$$

将其与 $A^2P_NS_M(t_0)p_1$ 取内积,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|AP_NS_M(\tau)p_1|^2\Big|_{\tau=t_0}+|A^{3/2}P_NS_M(t_0)p_1|^2=0$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|AP_NS_M(\tau)p_1|^2\Big|_{\tau=t_0}<0 \qquad (1.24)$$

这又推得 $|AP_NS_M(\tau)p_1|>4\rho$,对所有 $\tau\leqslant t_0$ 成立.而这又推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}P_NS_M(\tau)p_1+AP_NS_M(\tau)p_1=0 \quad \tau\leqslant t_0 \qquad (1.25)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}Q_NS_M(\tau)p_1+AQ_NS_M(\tau)p_1=0 \quad \tau\leqslant t_0 \qquad (1.26)$$

由定义知 $Q_NS_M(t_0)p_1=0$,从而(1.26)推得对所有 $\tau\leqslant t_0$ 有

$Q_NS_M(\tau)p_1=0$,这就推得(1.16).

令 $p_0\in H_N$,利用(1.15)和(1.16),我们推得

$$|AQ_NS_M(t_0)p_0|\leqslant l\cdot 4\rho\leqslant \rho/8<b$$

这就推出(1.17).

由于(1.13)有解的逆向存在性和关于初值的连续依赖性,从而 $S_M(t)H_N$ 对所有 $t\in R$,同构于 H_N;又由(1.15),当 $p_1,p_2\in H_N$ 且 $P_NS_M(t_0)p_1=P_NS_M(t_0)p_2$ 时有 $Q_NS_M(t_0)p_1=Q_NS_M(t_0)p_2$,从而 $S_M(t_0)p_1=S_M(t_0)p_2$,这说明 $P_NS_M(t)H_N$ 唯一对应于 $S_M(t)H_N$,反之亦然,即有 $P_NS_M(t)H_N$ 同构于 $S_M(t)H_N$,由传递性,$P_NS_M(t)H_N$ 与 H_N 同构.另一方面,对任何 $p\in H_N$,$|Ap|\geqslant 4\rho$ 时,从(1.25)推得存在唯一 $\tilde{p}(t,p)\in H_N$,$|A\tilde{p}|\geqslant 4\rho$ 且有 $S_M(t)\tilde{p}=p$,除非 $P_NS_M(t)H_N=H_N$(注意 $P_NS_M(t)H_N$ 与 H_N 同构)否则不可能有 $S_M(t)\tilde{p}=p$.定理证完.

下面我们估计近似惯性流形 $\mathrm{graph}(\psi_{t,M})=S_M(t)H_N$ 与(1.1)解的距离.

定理1.4 设 N 满足(1.12),则有如下估计:

$$\mathrm{dist}_{D(A)}(\mathrm{graph}(\psi_{t,M}),u(t))\leqslant CK_3\lambda_{N+1}^{\beta-1}$$

其中 $u(t)$是(1.1)的解.

证明 由 $S_M(t)p$ 的定义,$Q_NS_M(t)p$ 满足方程:

$$\frac{\mathrm{d}(Q_NS_M(t)p)}{\mathrm{d}t}+Q_NAS_M(t)p+Q_NP_MF(S_M(t)p)=0 \tag{1.27}$$

设 $u(t)$是(1.1)的解,于是

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}+Aq(t)+Q_NF(p+q)=0 \tag{1.28}$$

其中 $p=P_Nu(t)$,$q=Q_Nu(t)$.

记 $\Delta=Q_NS_M(t)p-Q_Nu(t)$,则 Δ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}+A\Delta+Q_NP_MF(S_M(t)p)-Q_NF(p+q)=0 \tag{1.29}$$

利用定理 1.3,用 $A^2\Delta$ 与(1.29)取内积,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A\Delta|^2}{\mathrm{d}t}+|A^{3/2}\Delta|^2+(A^{1-\beta}(Q_NP_MF(\widetilde{p}+Q_NS_M(t)p)-Q_NF(p+q)),A^{1+\beta}\Delta)=0 \tag{1.30}$$

由于

$$\begin{aligned}&A^{1-\beta}(Q_NP_MF(\widetilde{p}+Q_NS_M(t)p)-Q_NF(p+q))\\&=-A^{1-\beta}Q_MF(\widetilde{p}+Q_NS_M(t)p)+A^{1-\beta}(Q_NF(\widetilde{p}+Q_NS_M(t)p)\\&\quad-Q_NF(p+q))\end{aligned} \tag{1.31}$$

利用(1.6)和(1.8)得到(记 $K_3=K_2+2\rho K_2$)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta|^2+|A^{3/2}\Delta|^2\\&\leqslant K_1|A^{1+\beta}\Delta|+K_2(|A\Delta|\,|A^{1+\beta}\Delta|+|A(\widetilde{p}-p)|\,|A^{1+\beta}\Delta|)\\&\leqslant K_3\lambda_{N+1}^{\beta-\frac{1}{2}}|A^{3/2}\Delta|+K_2\lambda_{N+1}^{\beta-1}|A^{3/2}\Delta|^2\\&\leqslant\left(\frac{1}{4}+K_2\lambda_{N+1}^{\beta-1}\right)|A^{3/2}\Delta|^2+K_3^2\lambda_{N+1}^{2\beta-1}\end{aligned} \tag{1.32}$$

记 $2\left(1-\frac{1}{4}-K_2\lambda_{N+1}^{\beta-1}\right)=\sigma$,由(1.12),$\sigma>0$,于是

$$|A\Delta|^2\leqslant|A\Delta(0)|^2\mathrm{e}^{-\sigma\lambda_{N+1}t}+K_3^2\sigma^{-1}\lambda_{N+1}^{2\beta-2}(1-\mathrm{e}^{-\sigma\lambda_{N+1}t}) \tag{1.33}$$

取 t 适当大,我们得到

$$|A\Delta|\leqslant CK_3\lambda_{N+1}^{\beta-1} \tag{1.34}$$

上式已利用 $|A\Delta(0)|\leqslant 2\rho$;于是当 t 适当大,有

$$\mathrm{dist}_{D(A)}(\mathrm{graph}(\psi_{t,M}),u(t))\leqslant CK_3\lambda_{N+1}^{\beta-1} \tag{1.35}$$

特别有

$$\mathrm{dist}_{D(A)}(\mathrm{graph}(\psi_{t,M}),\mathscr{A})\leqslant CK_3\lambda_{N+1}^{\beta-1} \tag{1.36}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是(1.1)的整体吸引子.证毕.

注 1 H_N 称为平坦惯性流形,在 H_N 上,(1.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+P_NF(p)=0$$

这正是线性 Galerkin 方法相应的方程.这时有

$$\mathrm{dist}_{D(A)}(H_N, u(t)) \leqslant |Aq| \leqslant \rho$$

从而近似惯性流形 $\mathrm{graph}(\psi_{t,M}) = S_M(t)H_N$ 是比平坦惯性流形更加逼近于吸引子的一类流形.

注 2 可以证明,当 $t \to +\infty$ 时,在 $\mathscr{F}_{b,l,M}$ 中 $\psi_{t,M}$ 收敛到 ψ_M,且有 $\psi_M = \phi_M$. 其中 $\mathrm{graph}(\phi_M)$ 是(1.13)的惯性流形.

注 3 不难证明,只要 t 适当大,$\mathrm{graph}(\psi_{t,M})$ 与 $\mathrm{graph}(\phi)$ 的距离,从而也是 $S_M(t)H_N$ 与吸引子 $\mathscr{A}$ 的距离由下式给出:

$$\|\psi_{t,M} - \phi\| \leqslant \{2K_1[(1-\beta)e^{\beta}]^{-1} + b\lambda_1^{1-\beta}\}\lambda_{N+1}^{\beta-1} \qquad (1.37)$$

这一结果与(1.36)一致.

为说明注 1 的结论. 我们考虑下列问题:令 $e_j, j = 1,2,\cdots$,表示空间 l^2 的典则基,对 $v \in l^2$,我们令

$$v^l = \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k}e_{2k} \text{ 和 } v^0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_{2k+1}e_{2k+1}$$

其中 $v_j = (v, e_j)$ 是 v 在 l^2 中的 Fourier 系数($j = 1,2,\cdots$),在 l^2 中研究下列发展方程:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \lambda_1 u_1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}^2 = r \\
&\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 u_2 - u_1 u_2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k+1}^2 = \sigma \\
&\frac{\mathrm{d}u_{2k+1}}{\mathrm{d}t} + \lambda_{2k+1} u_{2k+1} - u_2 u_{2k+1} = f_{2k+1},\ k = 1,2,\cdots \\
&\frac{\mathrm{d}u_{2k}}{\mathrm{d}t} + \lambda_{2k} u_{2k} - u_1 u_{2k} = 0,\ k = 1,2,\cdots
\end{aligned} \qquad (1.38)$$

其中 r 和 σ 是正数,$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \to \infty$(当 $k \to \infty$),$f = re_1 + \sigma e_2 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k+1}e_{2k+1}$ 是 l^2 中的一个元. (1.38)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + B(u,u) = f,\ \text{在 } l^2 \text{ 中} \qquad (1.39)$$

其中 $A = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 和

$$B(u,v) = (u^l, v^l)e_1 - v_1 u^l + (u^0, v^0)e_2 - v_2 u^0$$

容易验证

$$(B(u,v),w) = -(B(u,w),v) \tag{1.40}$$

且对于每个 $\alpha>0$,

$$|A^{\alpha}B(u,v)| \leqslant 2|v||A^{\alpha}u|,\ \forall\, v \in l^2 \text{ 和 } u \in D(A^{\alpha}) \tag{1.41}$$

利用(1.40),(1.41),借助于通常的能量估计技巧可以验证(1.38)强解的整体存在性,同时当 $f \in D(A^{\frac{1}{2}})$时,在 $D(A)$中存在吸收集.

现在我们选取参数如下:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2k} = \lambda_{2k+1} = k^2,\ \text{当 } k = 1,2,3,\cdots$$

$$f_3 = 1, f_{2k+1} = k^{-5/2}(\log k)^{-1},\ k = 2,3,\cdots$$

$$\sigma = |A^{-1}f^0|^2 \text{ 和 } r \geqslant 4$$

注意参数 r 控制着(1.38)稳态解的数量,选取 r 充分大,使得我们不可能有唯一稳定的平衡解.

令 $R(u)=B(u,u)-f$,则由(1.41)可得(1.3),(1.4)对于 $\beta=0$ 成立.此外上面对 λ_m 的选取保证(1.12)成立.

从(1.38),取$\widetilde{u}=A^{-1}(f^0+re_1)$,易验证$\widetilde{u}$是一个平衡解,从而$\widetilde{u}$属于整体吸引子,故它位于惯性流形上,但是,对 $N>1$,有

$$|Q_NA\,\widetilde{u}| = \sum_{2k+1>N} f_{2k+1}^2 \geqslant \sum_{2k+1>N} k^{-5}(\log k)^{-2}$$

$$|Q_NA\,\widetilde{u}|^2 \geqslant \int_N^{\infty} x^{-5}(\log x)^{-2}\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

$$|Q_NA\,\widetilde{u}|^2 \geqslant [6N^4(\log N)^2]^{-1}$$

于是

$$|Q_NA\,\widetilde{u}| \geqslant c_0[\lambda_{N+1}\log(\lambda_{N+1}/\lambda_1)]^{-1}$$

(1.42)表明:$\sup|H_N - \mathrm{graph}(\phi)|$,即

$$\sup_{p\in H_N}|A\phi(p)| \geqslant c_0[\lambda_{N+1}\log(\lambda_{N+1}/\lambda_1)]^{-1}$$

但当 $\beta=0$ 时,由(1.36)

$$\|\psi_{t,M} - \phi\| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-1}$$

§2 AIM构造(Ⅰ)

对于一个耗散非线性发展方程,AIM 的构造技巧各有不同,但都紧紧围绕两个问题,其一是 AIM 本身的一定程度光滑性,其二是 AIM 逼近于方程的解和整体吸引子的程度和速度,而这两个问题又都与方程解的光滑性联系在一起.本节我们先研究方程(1.1)~(1.2)的解关于 t 充分光滑时 AIM 的构造和对吸引子逼近阶数的估计,然后再研究(1.1)~(1.2)的解关于空间变量充分光滑时 AIM 的构造和逼近于吸引子的阶数估计.

我们研究问题(1.1)~(1.2).在(1.1)中取 $A=-d\Delta+\mathrm{I}$ 其中 Δ 为 Laplace 算子,I 为单位算子,$R(u)$为关于 u 的多项式,满足

$$c_1|s|^r-c_3\leqslant R(u)u\leqslant c_2|s|^r+c_3,\quad \forall s\in R,r>2 \tag{2.1}$$

$$R'(s)\geqslant -c_4,\qquad \forall s\in R \tag{2.2}$$

研究下列三类边值问题之一:

$$u|_{\partial\Omega}=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=0 \tag{2.3}$$

$\Omega=\Pi_{i=1}^n(0,L_i)$,$u$ 是Ω 周期的.

于是记 $H=L^2(\Omega)$,

$$V=D(A^{\frac{1}{2}}),D(A)=\{u\in H^2(\Omega),(2.3)\text{ 成立}\},$$

$r,c_i(i=1,2,3,4)$全为正的常数,下面的结论成立:

定理 2.1 在假设(2.1)~(2.2)条件下,问题(1.1)~(1.2)存在唯一整体解 u,当 $u_0\in H$ 时,u 满足

$$u\in C(R^+,H)\cap L^2(0T;V)\cap L^r([0,T]\times\Omega),\ \forall T>0$$

如果 $u_0\in L^r(\Omega)$,则

$$u\in C(R^+,V\cap L^r(\Omega))\cap L^2(0,T;D(A)),\ \forall T>0$$

又如果 $u_0 \in B_R^H(0)$，则存在 $t_0>0$，使 $t \geqslant t_0$ 有

$$|Au(t)| \leqslant \rho, \ \forall t \geqslant t_0 \tag{2.4}$$

$$\| u(t) \|_\infty \leqslant \rho, \ \forall t \geqslant t_0 \tag{2.5}$$

于是与本章第一节同样，引入截断函数 θ，方程写为(1.5)形式.

下面我们在条件(2.1)~(2.2)之下给出解 $u(t)$ 关于 t 的各阶导数的一致估计.

记

$$u^{(j)} = \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, \qquad j \in N$$

定理2.2 设(2.1)~(2.2)成立，此外设 $R(\cdot) \in C^{j_0}, j_0 \in N$，则对于 t 充分大，$t \geqslant t_{j_0}$，解 $u(t)$ 满足

$$\| u^{(j)}(t) \|_\infty \leqslant K, \ \forall_j = 0,1,\cdots,j_0 \tag{2.6}$$

其中 K 仅依赖于 j_0 和始值，t_{j_0} 依赖于 j_0 和 $(\Omega, d, R(u))$ 和 $R(|u_0| \leqslant R)$.

为证明定理 2.2，先给出一致 Gronwall 不等式.

设 g, h, y 是 (t_0, ∞) 上三个局部可积正函数，而且满足

$$\frac{dy}{dt} \in L^1_{loc}(t_0, +\infty), \frac{dy}{dt} \leqslant gy + h, t \geqslant t_0$$

$$\int_t^{t+r_1} g(s)ds \leqslant a_1, \int_t^{t+r_1} h(s)ds \leqslant a_2, \int_t^{t+r_1} y(s)ds \leqslant a_3, t \geqslant t_0$$

则

$$y(t+r_1) \leqslant (a_3 r_1^{-1} + a_2)\exp(a_1), \ \forall t \geqslant t_0$$

固定 $r_1>0$，用关于 l 的归纳法($0 \leqslant l \leqslant j_0$)证明存在 t_l，使得

$$\| u^{(j)} \|_\infty \leqslant K, j = 0, \cdots, l, \ \forall t \geqslant t_l \tag{2.7$_l$}$$

$$\int_t^{t+r_1} |u^{(l+1)}|^2 ds \leqslant K, \ \forall t \geqslant t_l \tag{2.8$_l$}$$

$l=0$ 时，由定理 2.1，$(2.7)_0$ 成立，为证 $(2.8)_0$，从(1.1)出发：

$$|u'| \leqslant |Au| + |R(u)|$$

由(2.5)和(2.2)，注意 $|R(u)|_\infty \leqslant |R(0)|_\infty + |R'(\tau u)|_\infty |u|_\infty \leqslant |R(0)|_\infty + C_4 K$，有

$$|u'|_\infty \leqslant K + C_4K + |R(0)|_\infty$$

取 $K_1 = K + C_4K + |R(0)|_\infty$,则$(2.8)_0$ 也成立,记 K_1 为 K.

设$(2.7)_l$,$(2.8)_l$ 对 $0\leqslant l\leqslant j_0-1$ 成立,证明对 $l+1$ 也成立.

$u^{(l+1)}$满足下列方程:

$$\frac{\partial u^{(l+1)}}{\partial t} - \mathrm{d}\Delta u^{(l+1)} + R'(u)u^{(l+1)} + h(u,u^{(1)},\cdots,u^{(l)}) = 0 \tag{2.9}$$

其中 $h:R^{l+1}\to R$ 的连续函数.记 $h^{(l+1)} = h(u,u^{(l)},\cdots,u^{(l)})$归纳假设保证了

$$|R'(u)|_\infty \leqslant K,\ \forall t \geqslant t_l \tag{2.10}$$

$$|h^{(l+1)}|_\infty \leqslant K,\ \forall t \geqslant t_l \tag{2.11}$$

用 $u^{(l+1)}$与(2.9)两边在 Ω 上取内积,得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u^{(l+1)}|^2 + d\int|\nabla u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x\\ &= -\int(R'(u)u^{(l+1)} + h^{(l+1)})u^{(l+1)}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.12}$$

利用(2.10),(2.11),以(2.12)推得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u^{(l+1)}|^2 + d\int|\nabla u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x\\ &\leqslant K(1+|u^{(l+1)}|)^2, \forall t \geqslant t_l\end{aligned} \tag{2.13}$$

由归纳假设$\int_t^{t+r_1}|u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x \leqslant K$, 利用一致 Gronwall 不等式得到

$$|u^{(l+1)}|^2 \leqslant K,\ \forall t \geqslant t_l + r_1 \tag{2.14}$$

从而有

$$\int_t^{t+r_1}\int|\nabla u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant K \tag{2.15}$$

又用 $-\Delta u^{(l+1)}$与(2.9)两边在 Ω 上取内积得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int|\nabla u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x + d\int|\Delta u^{(l+1)}|^2\mathrm{d}x\\ &= \int(R'(u)u^{(l+1)} + h^{(l+1)})\Delta u^{(l+1)}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.16}$$

对(2.16)右边先利用算术不等式,再类似(2.14)的推导有

$$\int |\nabla u^{(l+1)}|^2 \mathrm{d}x \leqslant K, \ \forall t \geqslant t_l + 2r_1$$
$$\int_t^{t+r_1}\int |\Delta u^{(l+1)}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant K, \ \forall t \geqslant t_l + 2r_1 \tag{2.17}$$

将(2.9)改写为

$$u^{(l+2)} = d\Delta u^{(l+1)} - R'(u)u^{(l+1)} - h^{(l+1)}$$

两边平方,利用(2.10),(2.11),(2.14)和(2.17)得到

$$\int_t^{t+r_1} |u^{(l+2)}|^2 \mathrm{d}s \leqslant K, \ \forall t \geqslant t_l + 2r_1$$

这表明$(2.8)_{l+1}$成立.下面剩下证明$|u^{(l+1)}|_\infty \leqslant K$.为此,我们引入与线性算子$\dfrac{\partial}{\partial t}+A$相应的算子半群$\sum(t)$(其中$Au=-d\Delta u+u$,相应的边界条件(2.3)),对于所有$\alpha,\beta\in[1,+\infty]$,$\alpha\leqslant\beta$,$\sum(t)$具有如下正则性:

$$\left|\sum(t)u\right|_\beta \leqslant Cm(t)^{-\left(\frac{n}{2\alpha}-\frac{n}{2\beta}\right)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}|u|_\alpha, \ \forall t \geqslant 0 \tag{2.18}$$

其中$m(t)=\min(1,t)$,λ_1为A的第一特征值,C是仅与Ω,d,α,β有关的常数.由(2.9),有

$$u^{(l+1)}(t) = \sum(t-t_l-r_1)u^{(l+1)}(t_l+r_1) - \int_{t_l+r_1}^{t}\sum(t-s)\{R'(u)u^{(l+1)} + h^{(l+1)}\}\mathrm{d}s, \ \forall t \geqslant t_l + r_1 \tag{2.19}$$

右边第一项取$\beta=\infty$,$\alpha=2$,得到(利用(2.14))

$$\begin{aligned}&\left|\sum(t-t_l-r_1)u^{(l+1)}(t_l+r_1)\right|_\infty \\ &\leqslant Cm(t)^{-\frac{n}{4}}\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-t_l-r_1)}|u^{(l+1)}(t_l+r_1)|_2 \\ &\leqslant K, \quad \forall t \geqslant t_l + r_1 + 1\end{aligned} \tag{2.20}$$

我们将右边第2项记为$u_2^{(l+1)}$,下证$|u_2^{(l+1)}|_\infty \leqslant K$,对任何$t \geqslant t_l$

$+r_1$ 成立. 我们有

引理2.3 对任何 $q\in[1,+\infty)$,

$$|u_2^{(l+1)}|_q\leqslant C,\quad \forall t\geqslant t_l+r_1 \tag{2.21}$$

成立, C 仅与 l,u_0 和 q 有关.

证明 先利用(2.18), 取 $\alpha=2$, 取 β 使 $\frac{n}{2\alpha}-\frac{n}{2\beta}=\frac{1}{4\alpha}$, 即有 $\beta=\beta_1=2\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$.

从而有

$$|u_2^{(l+1)}|_{\beta_1}\leqslant\int_{t_l+r_1}^{t}m(t-s)^{-1/8}e^{-\lambda_1(t-s)}|R'(u)u^{(l+1)}+h^{(l+1)}|ds \tag{2.22}$$

利用(2.10), (2.11)和(2.14), 有

$$|R'(u)u^{(l+1)}+h^{(l+1)}|\leqslant K,\ \forall s\geqslant t_l+r_1$$

于是

$$\begin{aligned}|u_2^{(l+1)}|_\beta&\leqslant K\int_{t_l+r_1}^{t}m(t-s)^{-1/8}e^{-\lambda_1(t-s)}ds\\&\leqslant K\int_{t_l+r_1}^{t-1}e^{-\lambda_1(t-s)}ds+K\int_{t-1}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{8}}ds\\&\leqslant K\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{8}{7}\right)\end{aligned}$$

故有 $|u_2^{(l+1)}|_\beta\leqslant K,\forall t\geqslant t_l+r_1$.

重复上述步骤, 在(2.18)中取 $\alpha=\beta_1$, 取 β 使 $\frac{n}{2\beta_1}-\frac{n}{2\beta_2}=\frac{1}{4\beta_1}$, 即 $\beta\doteq\beta_2=\beta_1\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)=2\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^2$, 类似上述计算得到

$$|u_2^{(l+1)}|_{\beta_2}\leqslant K,\ \forall t\geqslant t_l+r_1$$

一般地有 $\beta_s=2\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^s,s\in N$, 和

$$|u_2^{(l+1)}|_{\beta_s}\leqslant K,\ \forall t\geqslant t_l+r_1$$

由于当 $s\to+\infty$ 时, $\beta_s\to+\infty$, 引理 2.3 证毕.

利用引理 2.3,取 $q=n$,有

$$|u_2^{(l+1)}|_n\leqslant K,\ \forall t\geqslant t_l+r_1$$

在(2.18)中取 $\alpha=n,\beta=+\infty$ 即得 $|u_2^{(l+1)}|_\infty\leqslant K$,定理 2.2 证毕.

由定理 2.2,结合方程(1.1),有

推论 设(2.1)~(2.2)成立,$R(\cdot)\in C^{j_0+1},j_0\in N$,则当 $t\geqslant t_{j_0+1}$ 时,有

$$|Au^{(j_0)}|\leqslant K$$

下面我们给出 AIM 族的构造方法.

记 $\lambda=\lambda_N,\Lambda=\lambda_{N+1},\delta=\lambda_1/\lambda_{N+1},P=P_N,Q=I-P_N$. 应用 P,Q 作用于(1.5),有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+PF(p+q)=0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+Aq+QF(p+q)=0 \tag{2.24}$$

下面的不等式是平凡的:

$$|A^{\alpha+1/2}p|^2\leqslant\lambda|A^\alpha p|^2\quad\forall p\in D(A^{\alpha+1/2}),\alpha>0, \tag{2.25}$$

$$|A^{\alpha+1/2}q|^2\geqslant\Lambda|A^\alpha q|^2\quad\forall q\in D(A^{\alpha+1/2}),\alpha>0, \tag{2.26}$$

命题2.4 设(2.1),(2.2)成立,则对所有 $j\in N$,存在 $t_j(\Omega,d,F)$ 和 R,使得

$$|q^{(j)}(t)|\leqslant K\delta \tag{2.27}$$

$$|A^{\frac{1}{2}}q^{(j)}(t)|\leqslant K\delta^{\frac{1}{2}}\qquad\forall t\geqslant t'_j \tag{2.28}$$

证明 关于 t 微分(2.24)j 次,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q^{(j)}+Aq^{(j)}+QF_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)})=0 \tag{2.29}$$

其中已记

$$\frac{\mathrm{d}^jF(u)}{\mathrm{d}t^j}=F_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)})$$

将(2.29)与 $Aq^{(j)}$取内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{1/2}q^{(j)}|^2+|Aq^{(j)}|^2=-(F_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)}),Aq^{(j)})$$
$$\leqslant|F_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)})||Aq^{(j)}|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}|F_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)})|^2+\frac{1}{2}|Aq^{(j)}|^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{1/2}q^{(j)}|^2+|Aq^{(j)}|^2\leqslant|F_j(u,u^{(1)},\cdots,u^{(j)})|^2\leqslant K^2$$
$$\forall\, t\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant j}t_k$$

从而有

$$|A^{\frac{1}{2}}q^{(j)}(t)|^2\leqslant\frac{K^2}{\Lambda}+|A^{\frac{1}{2}}q^{(j)}(T_j)|^2e^{-\Lambda(t-T_j)},\ \forall\, t\geqslant T_j$$

但是

$$|A^{\frac{1}{2}}q^{(j)}(T_j)|\leqslant|A^{\frac{1}{2}}u^{(j)}(T_j)|\leqslant K_j$$

于是取 $t_j'=\sup\limits_N\max\left(T_j,T_j+\frac{1}{\lambda_{N+1}}\log\frac{\lambda_{N+1}K_j^2}{K}\right)$,当 $t\geqslant t_j'$ 有

$$|A^{\frac{1}{2}}q^{(j)}(t)|\leqslant K\delta^{1/2}$$

利用(2.26)得(2.27).证毕.

惯性流形的构造方法基于寻求 $PH\to QH$ 的变换 $\phi(p)$,在特定的变换函数类空间证明其不动点的存在,而作为不动点变换函数的图像就是一类惯性流形,近似惯性流形仍基于这一思想,仅仅是因为谱间隔条件的制约,而避开了“不动点”变换函数,代之而来的是舍弃“小结构”项的技巧,以换取高阶逼近结果.

注意 $|F_j|\leqslant K$ 而 $|q^{(j)}|\leqslant k\delta$,我们首先舍弃 $q^{(1)}$和 q,解如下方程以代替(2.24):

$$Aq+QF(p)=0\tag{2.30}$$

当 p 在 PH 空间给出,从(2.30)解得

$$q_1=\phi_1(p)\tag{2.31}$$

注意 $q_1\in QD(A)$,记 $\mathrm{graph}\phi_1(p)=\mu_1$,则 μ_1 是 H 中 N 维的光

滑流形，μ_1 与轨道 $u(t)$ 的距离由下面命题给出.

命题2.5 对于充分大的 t，(1.5)、(1.2)、(2.3)的任何轨道在 H 空间与 μ_1 的距离由 $K_1\delta^2$ 所控制.

证明 让 $u(t)=p+q$ 是(1.5)、(1.2)，(2.3)的轨道，对每个 $t>0$，定义 $q_1(t)=\phi_1(p(t))$，于是

$$\text{dist}(u(t),\mu_1) = \inf_{v\in\mu_1}|u(t)-v| \leqslant |q(t)-q_1(t)|$$

记 $\chi_1=q(t)-q_1(t)$，于是由(2.24)，(2.30)得到

$$A\chi_1 = Q(F(p+q)-F(p))+q'$$

从而 $|A\chi_1|\leqslant|F(p+q)-F(p)|+|q'|$，利用(2.27)和 F' 在 R 上有界性推得当 $t\geqslant\max(t'_0,t'_1)$，有

$$|A\chi_1|\leqslant K^2\delta+K\delta \triangleq K_1\delta$$

于是

$$|\chi_1|\leqslant K_1\delta^2 \tag{2.32}$$

在 μ_1 上继续构造 μ_2：用 $QF(p+q_1)$ 代替 $QF(p+q)$. 将(2.24)对 t 微分一次

$$q^{(2)}+Aq^{(1)}+QF'(p+q)(p^{(1)}+q^{(1)})=0 \tag{2.33}$$

$p^{(1)}$ 用 $p_1^1=-Ap-PF(p)$ 逼近，在(2.33)中舍弃 $q,q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$，解下列方程：

$$Aq_1^1+QF'(p)p_1^1=0 \tag{2.34}$$

解出 q_1^1 以后代入如下方程：

$$q_1^1+Aq_2+QF(p+q_1)=0 \tag{2.35}$$

解得 $q_2=\phi_2(p)$，记 $\mu_2=\text{graph}\phi_2(p)$，有

命题 2.6 只要 t 适当大，下列估计成立：

$$\text{dist}(u(t),\mu_2)\leqslant K_2\delta^3 \tag{2.36}$$

证明 估计 $p^{(1)}$ 与 p_1^1 误差

$$\begin{aligned}|p^{(1)}-p_1^1| &= |-PF(p+q)+PF(p)-Ap+Ap|\\ &\leqslant K|q|\leqslant K\delta\end{aligned}$$

q_1^1 与 $q^{(1)}$ 误差：

$$|A(q_1^1-q^{(1)})|\leqslant|QF'(p)p_1^1-QF'(p+q)(p^{(1)}+q^{(1)})|+|q^{(2)}|$$
$$\leqslant|F'(p)(p_1^1-p^{(1)})|+|(F'(p+q)-F'(p))p^{(1)}|$$
$$+|F'(p+q)q^{(1)}|+|q^{(2)}|\leqslant K_2\delta$$

所以

$$|q_1^1-q^{(1)}|\leqslant K'_2\delta^2$$

于是

$$|A(q_2-q)|\leqslant|q_1^1-q^{(1)}|+|QF(p+q)-QF(p+q_1)|$$
$$\leqslant K'_2\delta^2+K\delta^2$$

所以

$$|q_2-q|\leqslant K_2\delta^3$$

证毕.

继续下去,在 μ_2 上构造 $\mu_3,\cdots$,一般地构造 μ_k:构造两族逼近解 p_{k-i}^i 和 q_{k-i}^i,$i=1,2,\cdots,k-1$,使得 p_{k-i}^i 和 q_{k-i}^i 分别是 $p^{(i)}$ 和 $q^{(i)}$ 的一个逼近且满足如下估计:

$$|p_{k-i}^i(t)-p^{(i)}(t)|\leqslant K_k\delta^{k-i},\ i=1,2,\cdots,k-1 \qquad \forall t\geqslant t''_k \qquad (2.37)_k$$
$$|q_{k-i}^i(t)-q^{(i)}(t)|\leqslant K_k\delta^{k-i+1},\ i=0,1,\cdots,k-1 \qquad (2.38)_k$$

假定 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{k-1}$ 均已定义,以如下方式归纳定义 μ_k:将(2.23),(2.24)分别对 t 微分 $i-1$ 次和 i 次,然后分别用 p_α^l,q_β^l 代替方程中 $p^{(l)}$,$q^{(l)}$,其中 α,β 是一些适当的数,然后用 p_{k-i}^i,q_{k-i}^i 分别逼近 $p^{(i)}$ 和 $q^{(i)}$,得到

$$p_{k-i}^i=-Ap_{k-i+1}^{i-1}-PF_{i-1}(p+q_{k-i-1},p_{k-i+1}^1+q_{k-i}^1,\cdots,p_{k-i}^{i-1}+q_{k-i-1}^{i-1}) \qquad (2.39)$$

和

$$q_{k-i-1}^{i+1}+Aq_{k-i}^i+QF_i(p+q_{k-i-1},p_{k-i+1}^1+q_{k-i}^1,\cdots,p_{k-i}^i+q_{k-i-1}^i)=0 \qquad (2.40)$$

记 $q_0^l=0,\forall l\geqslant1$;$p_l^0=p,q_l^0=q_l,\forall l\geqslant1$,注意(2.39)中 p_{k-i}^i 有显式定义,因(2.39)右端各项可从 $\mu_1,\cdots,\mu_{k-1}$ 的构造过程中得到或由第$(i-1)$步递归定义 p_{k-i+1}^{i-1} 时得到.而(2.40)中除了 q_{k-i}^i 外

其余各项或由 $\mu_1,\cdots,\mu_{k-1}$的构造或由(2.39)或从关于 q_{k-i-1}^{i+1}的第$(i+1)$步递归定义模式中得到.对第一步 $i=k-1$,有 $q_{k-i-1}^{i+1}=q_0^k=0$,这表明 $q^{(k)}$舍去.

取 $i=0$,从(2.40)得到

$$q_{k-1}^1+Aq_k+QF(p+q_{k-1})=0$$

于是,$q_k=\phi_k(p(t))$,记 $\mu_k=\mathrm{graph}\phi_k(p)$,$\mu_k$ 是光滑流形.我们有

定理2.7 设(2.1),(2.2)成立且 $n\leqslant 4$,则对充分大的 t,$t\geqslant t''_k$,(1.5),(1.2),(2.3)的任何解 $u(t)$在 H 空间中与μ_k 的距离由$K_k\delta^{k+1}$所界,其中 K_k 是仅与k,t''_k 和R 有关的常数.($|u_0|\leqslant R$).

证明 记 $u_k(t)=p+q_k(t)$;$\chi_k(t)=q_k(t)-q(t)$

则

$$A\chi_k(t)=Q(F(p+q_{k-1})-F(p+q))+q^{(1)}-q_{k-1}^1$$

$$|A\chi_k(t)|\leqslant K|q_{k-1}-q|+|q^{(1)}-q_{k-1}^1|$$

由$(2.38)_k$ 和归纳假设有

$$|A\chi_k(t)|\leqslant K_k\delta^k,\ \forall t\geqslant t''_k$$

从而

$$|\chi_k(t)|\leqslant K_k\delta^{k+1}$$

证毕.

下面证明$(2.37)_k$ 和$(2.38)_k$,用归纳法证明.

$k=1$,$(2.37)_1$ 显然,$(2.38)_1$ 已证.

若 $1\leqslant l\leqslant k-1$,$k\geqslant 2$ 时结论成立,则须证$(2.37)_k$ 和$(2.38)_k$ 也成立.

先用关于 i 的上行归纳证$(2.37)_k$,然后用关于 i 的下行归纳证$(2.38)_k$.

$(2.37)_k$ 的证明:

当 $i=0$,$(2.37)_k$ 显然,若$(2.37)_k$ 对直到$i-1$ 时成立,则有

$$\begin{aligned}p_{k-i}^i-p^{(i)}=&-A(p_{k-i+1}^{i-1}-p^{(i-1)})\\&-P[F_{i-1}(p+q_{k-i-1},p_{k-i+1}^1+q_{k-i}^1,\cdots,p_{k-i}^{i-1}+q_{k-i-1}^{i-1})\end{aligned}$$

$$- F_{i-1}(p+q, p^{(1)}+q^{(1)}, \cdots, p^{(i-1)}+q^{(i-1)})] \quad (2.41)$$

由归纳假设有

$$|A(p_{k-i+1}^{i-1} - p^{(i-1)})| \leqslant \lambda |p_{k-i+1}^{i-1} - p^{(i-1)}| \leqslant K\lambda\delta^{k-i+1} \leqslant K\delta^{k-i}$$

又由定理 2.1, 2.2 知 $p+q, p^{(1)}+q^{(1)}, \cdots, p^{(i-1)}+q^{(i-1)}$ 在 $D(A)$ 和 $L^\infty(\Omega)$ 中有界，且由 $(2.37)_k$ 和 $(2.38)_k$ 的前 $i-1$ 步推得 $p+q_{k-i-1}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界和 $p_{k-i+1}^1 + q_{k-i}^1, \cdots, p_{k-i+1}^{i-2} + q_{k-i}^{i-2}$ 在 $D(A)$ 中有界，$p_{k-i}^{i-1} + q_{k-i-1}^{i-1}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中有界，于是为估计(2.41)中的其余项，我们还须要下面引理：

引理 2.8 设 $n \leqslant 4$，对 $(u, u_1, \cdots, u_{l-1}, u_l) \in L^2(\Omega) \times (D(A) \cap L^\infty(\Omega))^{l-1} \times (L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega))$ 和 $(v, v_1, \cdots, v_{l-1}, v_l) \in L^2(\Omega) \times D(A)^{l-1} \times L^2(\Omega)$，有

$$|f_l(u, u_1, \cdots, u_l) - f_l(v, v_1, \cdots, v_l)| \leqslant C(R)(|u-v| + |A(u_1-v_1)| + \cdots + |A(u_{l-1}-v_{l-1})| + |u_l - v_l|)$$

其中 $|u| \leqslant R$, $|v| \leqslant R$, $|u_l|_\infty \leqslant R$, $|u_l| \leqslant R$, $|v_l| \leqslant R$, $|Au_i| \leqslant R$, $|Av_i| \leqslant R$, $|u_i|_\infty \leqslant R$, $i = 1, \cdots, l-1$.

引理 2.8 的证明：

分解 $f_l(u, u_1, \cdots, u_l) = g_l(u, \cdots, u_{l-1}) + f'(u)u_l$，于是

$$\begin{aligned} f_l(u, u_1, \cdots, u_l) - f_l(v, v_1, \cdots, v_l) &= g_l(u, u_1, \cdots, u_{l-1}) \\ &- g_l(v, u_1, \cdots, u_{l-1}) + g_l(v, u_1, \cdots, u_{l-1}) \\ &- g_l(v, v_1, u_2, \cdots, u_{l-1}) + \cdots + g_l(v, v_1, \cdots, v_{l-2}, u_{l-1}) \\ &- g_l(v, v_1, \cdots, v_{l-1}) + f'_l(u)u_l - f'_l(v)v_l \end{aligned}$$

上式第一项是 $u_1, \cdots, u_{l-1}$ 单项式的和，其单项式系数是 $f^{(k)}(u) - f^{(k)}(v)$ 的常数倍，由于 f 的各阶微商是 Lipschitz 且 $u_1, \cdots, u_{l-1}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界，我们有

$$|g_l(u, u_1, \cdots, u_{l-1}) - g_l(v, u_1, \cdots, u_{l-1})| \leqslant K(k)|u-v|$$

第 2 项是如下类型的表达式：

$$\sum_k a_k g^{(k)}(v) u_2^{\alpha_2, k} \cdots u_{l-1}^{\alpha_{l-1}, k} (u_1^{\alpha_1, k} - v_1^{\alpha_1, k})$$

利用 Hölder 不等式和 g 的微商的有界性，记 $\beta_{i,k}=\alpha_{i,k}p_i$ 和 $\sum_{i=1}^{l-1}p_i^{-1}=1$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&|g_l(v,u_1,\cdots,u_{l-1})-g_l(v,v_1,u_2,\cdots,u_{l-1})|\\
\leqslant&\sum_k|a_k|(\sup|g^{(k)}|)|u_1-v_1|_{\beta_{1,k}}^{\alpha_{1,k}}\times|u_2|_{\beta_{2,k}}^{\alpha_{2,k}}\cdots|u_{l-1}|_{\beta_{l-1,k}}^{\alpha_{l-1,k}}\\
\leqslant&\sum|a_k|\sup|g^{(k)}|(|u_1|_{\beta_{1,k}}+|v_1|_{\beta_{1,k}})^{\alpha_{1,k}-1}\\
&\times|u_2|_{\beta_{2,k}}^{\alpha_{2,k}}\times\cdots\times|u_{l-1}|_{\beta_{l-1,k}}^{\alpha_{l-1,k}}|u_1-v_1|_{\beta_{1,k}}\\
\leqslant&K(R)|A(u_1-v_1)|
\end{aligned}
$$

上式中已利用对所有 p，$H^2(\Omega)\subset L^p(\Omega)$，而 H^2 范等价于 $|A\cdot|$，类似地处理中间各项，而最后一项有

$$
\begin{aligned}
|f'(u)u_l-f'(v)v_l|&\leqslant|(f'(u)-f'(v)u_l|+|f'(v)(u_l-v_l)|\\
&\leqslant K|u-v||u_l|_\infty+K|u_l-v_l|\\
&\leqslant K(R)(|u-v|+|u_l-v_l|)
\end{aligned}
$$

综合以上各式推得引理 2.8.

将引理 2.8 的结果用于(2.41)右边第 2 项，有

$$
\begin{aligned}
&\leqslant k(|q_{k-i-1}-q|+|A(p_{k-i+1}^1-p^{(1)})|+|A(q_{k-i}^1-q^{(1)})|\\
&\quad+\cdots+|A(p_{k-i+1}^{i-2}-p^{(i-2)})|+|A(q_{k-i}^{i-2}-q^{(i-2)})|\\
&\quad+|p_{k-i}^{i-1}-p^{(i-1)}|+|q_{k-i-1}^{i-1}-q^{(i-1)}|)
\end{aligned}
$$

由归纳假设推知，只要 t 充分大，上式

$$\leqslant k\delta^{k-i},\ \forall t\geqslant t''_k$$

(2.37)证毕. 最后对$(2.38)_k$ 用关于 i 的下行归纳证明.

对于 $i=k-1$，(2.40)中，因为 $q_0^k=0$，故有

$$Aq_1^{k-1}+QF_{k-1}(p,p_2^1+q_1^1\cdots,p_2^{k-2}+q_1^{k-2},p_1^{k-1})=0$$

而对于 $q^{(k-1)}$，从方程(2.29)出发，有

$$
\begin{aligned}
q^{(k)}+Aq^{(k-1)}+QF_{k-1}(p+q,p^{(1)}+q^{(1)},\cdots,p^{(k-2)}\\
+q^{(k-2)},p^{(k-1)}+q^{(k-1)})=0
\end{aligned}
$$

因此

$$|A(q_1^{k-1}-q^{(k-1)})|\leqslant|q^{(k)}|+|F_{k-1}(p,p_2^1+q_1^1,\cdots,p_1^{k-1})$$
$$-F_{k-1}(p+q,p^{(1)}+q^{(1)},\cdots,p^{(k-1)}+q^{(k-1)})|$$

由(2.27)，$|q^{(k)}|\leqslant k\delta$，利用引理2.8于右边第2项，

$$\leqslant k(|q|+|A(p_2^1-p^{(1)})|+|A(q_1^1-q^{(1)})|+\cdots$$
$$+|A(p_2^{k-2}-p^{(k-2)})|+|A(q_1^{k-2}-q^{(k-2)})|$$
$$+|p_1^{k-1}-p^{(k-1)}|+|q^{(k-1)}|)\leqslant k\delta$$

所以有$|A(q_1^{k-1}-q^{(k-1)})|\leqslant k\delta$，即 $i=k-1$ 时$(2.38)_k$ 成立.

设$(2.38)_k$ 对$i=k-1,k-2,\cdots,i+1$ 时成立，证明对 i 时$(2.38)_k$ 也成立：

将(2.24)对 t 微分i 次然后与(2.40)相减，有

$$|A(q_{k-i}^i-q^{(i)})|\leqslant|q_{k-i-1}^{i+1}-q^{(i+1)}|$$
$$+|F_i(p+q_{k-i-1}^1,\cdots,p_{k-i}^i+q_{k-i-1}^i)$$
$$-F_i(p+q,p^{(1)}+q^{(1)},\cdots,p^{(i)}+q^{(i)})|$$

由归纳假设知：$|q_{k-i-1}^{i+1}-q^{(i+1)}|\leqslant k\delta^{k-i}$，

利用引理2.8，类似上面的推导，

$$|F_i(p+q_{k-i-1}^1,\cdots,p_{k-i}^i+q_{k-i-1}^i)$$
$$-F_i(p+q,\cdots,p^{(i)}+q^{(i)})|\leqslant k\delta^{k-i}$$

从而

$$|A(q_{k-i}^i-q^{(i)})|\leqslant k\delta^{k-i}$$

$(2.38)_k$ 获证.

下面我们研究方程(1.1)的解关于空间变量充分光滑时，AIM的构造方法和对吸引子的逼近估计.

记

$$A=-\partial_{xx},F(u)=B(u,u)+R(u)$$

其中 $B(u,v)=-\beta u\times v_{xx}$，$R(u)=-\alpha|u_x|^2u$，"$\times$"表示 R^3 中向量的矢量积. 于是代替(1.1)，(1.2)我们研究

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha u_{xx}+\beta u\times u_{xx}+\alpha|u_x|^2u$$
$$=-\alpha Au-B(u,u)-R(u) \qquad (2.42)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ |u_0(x)|=1,\ x\in\Omega \tag{2.43}$$

$$u(x-D,t)=u(x+D,t),\quad x\in R,t\in R \tag{2.44}$$

(2.42)~(2.44)称为铁磁链方程组.

引理2.9 设 $u_0\in H^2\cap H_\rho$,则对于问题(2.42)~(2.44)的解 $u(t)$,有

$$\| u_{xx}(t)\|\leqslant c,\ \int_t^{t+1}\| u_{xxx}\|^2\mathrm{d}t\leqslant c,\ \forall\, t\geqslant t_1 \tag{2.45}$$

$$|u(x,t)|^2=1,\quad (x,t)\in R\times R^+ \tag{2.46}$$

$$\| u_x(t)\|^2\leqslant \| u_x(0)\|^2,\quad t\in R^+ \tag{2.47}$$

其中 c 表示仅与 α,β,ρ,Ω 和 R 有关的常数,$\| u_0\|_{H^2}\leqslant R, H_\rho=\{u\in H, |u(x)|=1, \| u_x\|\leqslant\rho\}$,

证明参见[45].

引理2.10 设 $u_0\in H^{k+1}\cap H_\rho, k>1$,则我们有

$$\| D_x^{k+1}u(t)\|^2\leqslant c_k,\quad \forall\, t\geqslant t_k \tag{2.48}$$

$$\int_t^{t+1}\| D_x^{k+2}u(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant c_k,\ \forall\, t\geqslant t_k \tag{2.49}$$

证明 参见[45],这里仅给出粗线条.对 k 采用归纳法证明,$k=1$,就是(2.45).若(2.48),(2.49)对 $k\leqslant k-1\to\bar{k}-1$ 成立,则对(2.42)微分 $k+1$ 次(关于 x),然后用 $D_x^{k+1}u$ 与之在 H 中取内积,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| D_x^{k+1}u\|^2+\alpha\| D_x^{k+2}u\|^2\\ =&\beta\sum_{i=0}^{k+1}c_{k+1}^i\int(D_x^{k+1-i}u\times D_x^iu_{xx})\cdot D_x^{k+1}u\,\mathrm{d}x\\ &+\alpha\sum_{i=0}^{k+1}c_{k+1}^i\int D_x^i|u_x|^2(D_x^{k+1-i}u\cdot D_x^{k+1}u)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

利用 $H^1\subset L^\infty$ 和当 $\int u(x,t)\mathrm{d}x=0$ 时有 $\| u_x\|\geqslant c\| u\|$,以及归纳假设,经过不太复杂的计算,有

$$\begin{aligned}&\beta\sum_{i=0}^{k+1}c_{k+1}^i\int(D_x^{k+1-i}u\times D_x^iu_{xx})\cdot D_x^{k+1}u\,\mathrm{d}x\\ \leqslant&\frac{\alpha}{4}\| D_x^{k+2}u\|^2+c\| D_x^{k+1}u\|^2\end{aligned} \tag{2.50}$$

和

$$\alpha\sum_{i=0}^{k+1}c_{k+1}^{i}\int D_x^i|u_x|^2(D_x^{k+1-i}u\cdot D_x^{k+1}u)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}\|D_x^{k+2}u\|^2+c\|D_x^{k+1}u\|^2 \tag{2.51}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_x^{k+1}u\|^2+\alpha\|D_x^{k+2}u\|^2\leqslant c\|D_x^{k+1}u\|^2 \tag{2.52}$$

这就推出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D_x^{k+1}u\|^2\leqslant c\|D_x^{k+1}u\|^2$$

但由归纳假设有$\int_t^{t+1}\|D_x^{k+1}u\|^2\mathrm{d}x\leqslant c$,对 $t\geqslant t_*$. 于是由一致 Gronwall 不等式推得

$$\|D_x^{k+1}u\|^2\leqslant c,\quad\forall t\geqslant t_*+1$$

对(2.52)关于 t 在$(t,t+1)$内积分得到

$$\alpha\int_t^{t+1}\|D_x^{k+2}u\|^2\mathrm{d}x\leqslant c,\quad\forall t\geqslant t_*+1$$

这就完成了引理 2.10 的证明.

通过(2.42)关于 x 微分 k 次,应用引理 2.10,我们可以证明

引理2.11 设 $u_0\in H^{k+2}\cap H_\rho,k>0$,则有

$$\|D_x^k u_t\|\leqslant c_k,\qquad t\geqslant t_k \tag{2.53}$$

其中 c_k 仅与$R(\|u_0\|_{H^2}\leqslant R)$和 k 有关.

有了以上准备,我们可以构造 AIM.

令 $D(A)=\{u\in H^2,u$ 满足(2.44)$\}$.类似于(2.23),(2.24):

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\alpha Ap+PB(p+q,p+q)+PR(p+q)=0 \tag{2.54}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\alpha Aq+QB(p+q,p+q)+QR(p+q)=0 \tag{2.55}$$

由引理 2.9~2.11,有

$$\|u\|,\ \|Au\| \leqslant c \qquad \forall t \geqslant t_*$$

$$\|A^{\frac{k}{2}}u\|,\ \|A^{\frac{k+1}{2}}u\|,\ \|A^{\frac{k}{2}+1}u\|,\ \|A^{\frac{k}{2}}u_t\| \leqslant c_k,\ \forall t \geqslant t_k$$

从而

$$\|q\|,\ \|Aq\|,\ \|A^{\frac{3}{2}}q\|,\ \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q\| \leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-\frac{k-1}{2}},\ \forall t \geqslant t_k \tag{2.56}$$

现在我们寻求映射 $\phi: P_NH \to Q_NH$，使对任何 $p \in P_NH, \phi(p) = \psi$，且 ψ 由下式给出：

$$\alpha A\psi + Q_NB(p,p) + Q_NR(p) = 0 \tag{2.57}$$

令 $\Sigma = \mathrm{graph}(\phi)$，我们有

定理2.12 设 $u_0 \in H^{k+2} \cap H_\rho$，则对任何整数 k，存在仅与 k 和 $R(\|u_0\|_{H^2} \leqslant R)$ 有关的常数 c_k，使

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t), \Sigma) \leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-(k-1)/2},\ \forall t \geqslant t_k \tag{2.58}$$

证明

$$\begin{aligned}
&\alpha A\psi - \alpha Aq \\
&= q_t + Q_NB(p+q, p+q) - Q_NB(p,p) \\
&\quad + Q_NR(p+q) - Q_NR(p) \\
&= q_t + Q_NB(q, p+q) + Q_NB(p,q) \\
&\quad + Q_NR(p+q) - Q_NR(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|B(q, p+q) + B(p,q)\| \\
&\leqslant \beta\|q \times Au\| + \beta\|p \times Aq\| \\
&\leqslant \beta\|Au\|_\infty\|q\| + \beta\|p\|\ \|Aq\|_\infty \\
&\leqslant \beta\|A^{3/2}u\|\ \|q\| + \beta\|p\|\ \|A^{3/2}q\| \\
&\leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-\frac{k-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|R(p+q) - R(p)\| \\
&= \alpha\|\,|u_x|^2u - |p_x|^2p\| \\
&\leqslant \alpha\|(|u_x|^2 - |p_x|^2)u\| + \alpha\|\,|p_x|^2(u-p)\| \\
&\leqslant \alpha(\|u_x\|_\infty + \|p_x\|_\infty)\|q_x\|_\infty\|u\|
\end{aligned}$$

$$+\alpha\|p_x\|_\infty^2\|q\|$$
$$\leqslant 2\alpha\|Au\|\ \|Aq\|\ \|u\| + \alpha\|Au\|\ \|q\|$$
$$\leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-(k-1)/2}$$

从而

$$\|A\psi - Aq\| \leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-(k-1)/2},\ \forall t \geqslant t_k$$

因此有

$$\mathrm{dist}_{H^2}(u(t),\Sigma) \leqslant \|u(t) - p(t) - \phi(p)\|_{H^2}$$
$$\leqslant \|\phi(p) - q(t)\|_{H^2} \leqslant \|A\psi - Aq\|$$
$$\leqslant c_k\lambda_{N+1}^{-(k-1)/2}$$

注 1　对非线项 $R(u)$若含有关于 u 高阶微分,则可以将上述构造方法进行细分,例如:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A^2u + Af(u) = 0$$

我们可用下述方法构造

$$A^2q_1 + QAf(p) = 0 \Rightarrow q_1 = \phi_1(p) \Rightarrow \mu_1$$
$$\downarrow \qquad \swarrow$$
$$A^2q_2 + QAf(p + \phi_1(p)) = 0 \Rightarrow q_2 = \phi_2(p) \Rightarrow \mu_2$$
$$\downarrow$$

令$\overline{p}_1^1 = -A^2p - PAf(p + q_1)$

$$\downarrow$$
$$A^2\overline{q}_1^1 + Qf'(p)\overline{p}_1^1 = 0 \Rightarrow \overline{q}_1^1$$
$$\downarrow \qquad \swarrow$$
$$\overline{q}_1^1 + A^2q_3 + QAf(p + q_2) = 0 \Rightarrow q_3 = \phi_3(p) \Rightarrow \mu_3$$
$$\downarrow$$

令$\overline{p}_2^1 = -A^2p - PAf(p + q_2)$

$$\downarrow$$
$$A^2\overline{q}_2^1 + QAf'(p + q_1)(\overline{p}_2^1 + \overline{q}_1^1) = 0 \Rightarrow \overline{q}_2^1$$
$$\downarrow \qquad \swarrow$$

$$\overline{q}_2^1 + A^2 q_4 + QAf(p + q_3) = 0 \Rightarrow q_4 = \phi_4(p) \Rightarrow \mu_4$$

………

§3 AIM 构造(Ⅱ)

当方程的解不具有足够光滑条件时,我们不能像第 2 节那样去构造一族 AIM,但是我们可以利用非线性 Galerkin 方法和压缩映像原理去构造 AIM,并获得逼近程度较高的 AIM.

在方程(1.1)中,如果我们令:

$A = -\nu\Delta$, Δ:Laplace 算子

$R(u) = (u \cdot \nabla)u + \nabla p - F$, ∇:梯度算子

那么研究下列二维粘滞不可压缩流的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = F \quad \text{在 } \Omega \times R_+ \text{ 中} \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3.3}$$

Ω 为 R^2 中有界区域,u 为流的速度向量,$p = p(x,t)$代表压力,而常数 $\nu > 0$ 是流体流动的粘滞性,$F(x)$为外物体力.

我们仅考虑齐次 Dirichlet 边界条件:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.4a}$$

或周期边界条件:

$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$且 u, p 在 x_i 方向($i = 1,2$)是以 L_i 为周期的函数. (3.4b)

对于(3.4a),记

$$\mathscr{V} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^2; \mathrm{div} v = 0\} \tag{3.5a}$$

对于(3.4b),记

$\mathscr{V} = \{v$ 是在 $x_i(i = 1,2)$方向以 L_i 为周期取值于 R^2 中三角多项式,$\mathrm{div} v = 0$ 和 $\int_\Omega v(x)\mathrm{d}x = 0\}$ (3.5b)

在上述两种情况，令 H 为 $\mathcal{V}$ 在 $(L^2(\Omega))^2$ 中的闭包，V 为 $\mathcal{V}$ 在 $(H^1(\Omega))^2$ 中的闭包. 分别记 $|u|$，$\|u\|$ 为 u 在 H，V 中范数.

令 P 为 $(L^2(\Omega))^2$ 到 H 上正交投影，$D(A)=V\cap(H^2(\Omega))^2$，定义 Stokes 算子：

$$Au=-P\Delta u,\ \forall u\in D(A)$$

和双线性算子

$$B(u,v)=P[(u\cdot\nabla)v],\ \forall u,v\in D(A)$$

我们有下面的不等式，

$$|(B(u,v),w)|\leqslant c|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\|\,|w|^{1/2}\|w\|^{1/2}\quad \forall u,v,w\in V \tag{3.6}$$

$$|(B(u,v),w)|\leqslant c\|u\|_{L^\infty}\|v\|\,|w|\quad \forall u\in D(A),v\in V,w\in H \tag{3.7}$$

又有

$$\|u\|_\infty\leqslant c\|u\|\left(1+2\log\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{1/2}\|u\|}\right)\right)^{1/2},\ \forall u\in D(A) \tag{3.8}$$

结合(3.7)，(3.8)，有

$$|(B(u,v),w)|\leqslant c\|v\|\,|w|\,\|u\|\left(1+2\log\left(\frac{|Au|}{\lambda_1^{1/2}\|u\|}\right)\right)^{1/2}\quad \forall u\in D(A),v\in V,w\in H \tag{3.9}$$

和

$$|(B(u,v),w)|\leqslant c\|v\|\,|u|\,\|w\|\left(1+2\log\left(\frac{|Aw|}{\lambda_1^{1/2}\|w\|}\right)\right)^{1/2}\quad \forall u\in H,v\in V,w\in D(A) \tag{3.10}$$

由 $B(u,v)$ 定义，有

$$(B(u,v),w)=-(B(u,w),v),\ \forall u\in H,v,w\in D(A) \tag{3.11}$$

利用上述记号，(3.1)～(3.4a)，(3.1)～(3.4b)可以统一写为下列泛函微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\nu Au+B(u,u)=f \tag{3.12}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.13}$$

下面的结论成立：

定理 3.1 存在 V 中的吸收集 B_0：

$$B_0=\{u\in V,|u|\leqslant M_0,\text{和 }\|u\|\leqslant M_1\} \tag{3.14}$$

使当 $t\geqslant t_0$ 时有(3.12)～(3.13)的任何解 $u(t)\subset B_0$，其中 M_0，M_1，仅与 f，$|u_0|$，ν，λ_1 有关.

为构造(3.12)的 AIM，我们需要 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的一致性估计. 下面关于解对于时间解析性定理是十分重要的.

我们回到方程(1.1). 记 $|\cdot|_1=(\|\cdot\|^2+|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$，对于正整数 k，定义 $\boldsymbol{H}=\bigoplus_1^k H$，$\boldsymbol{V}=\bigoplus_1^k V$ 和 $\boldsymbol{D}(A)=\bigoplus_1^k D(A)$，对于直和空间赋予通常的 Hilbert 范数和内积，对于向量 $u\in\boldsymbol{H}$ 我们定义 $Au=(Au_1,Au_2,\cdots,Au_k)$. 我们研究下列方程：

$$u'(t)+DAu(t)+R(u)=f(t),t\in R_+ \tag{3.15}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.16}$$

其中 $f:R_+\to\boldsymbol{H}$ 是解析函数，$D=(d_{ij})_{k\times k}$ 是实正定阵. 记 $\boldsymbol{H}_c$，$\boldsymbol{V}_c$ 和 $\boldsymbol{D}(A)_c$ 分别为 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{D}(A)$ 的复化，下面的内积公式是显然的：

$$(h_1+ih_2,g_1+ig_2)=(h_1,g_1)+(h_2,g_2)+i[(h_2,g_1)-(h_1,g_2)]$$

也易于构造 $\boldsymbol{H}_c$ 中由 A 的特征向量组成的正交基 $\{\boldsymbol{W}_j\}$.

我们假设存在 $1\leqslant\gamma<\infty$ 和 $k>0$ 以及函数 $C\in C(0,\infty,R_+)$，使得对所有 $\varepsilon>0$，R 满足：

$$|(R(u),Au+u)|\leqslant\varepsilon|Au|^2+C(\varepsilon)|u|_1^{2\gamma}+k;\forall u\in\boldsymbol{D}(A)_c \tag{3.17a}$$

又对每个紧集 $X\subset C$，$v_m:X\to\boldsymbol{D}(A)$ 在弱拓扑意义下当 v_m 一致收敛到 v 时有

$$R(v_m)\to R(v),\ \text{在 } L^2(X;\boldsymbol{H})\text{ 中弱收敛} \tag{3.17b}$$

同时存在 $M>0$,使得

$$\| f(t) \|_* \leqslant M \qquad \forall t \in R_+ \tag{3.18}$$

则有如下定理:

定理3.2 令 u 是(3.15)~(3.16)的一个解,则存在 θ_0: $|\theta_0| \leqslant \frac{\pi}{4}$和函数 $T_1 \in C(R_+, R_+)$,使得如果$|u(0)|_1$ 是有限的,则 u 有一个解析延拓到如下形式区域内的$D(A)_c$ 值.

$$\Delta(|u(0)|_1) = \{z = se^{i\theta} \mid |\theta| \leqslant \theta_0, 0 \leqslant S \leqslant T_1(|u(0)|_1)\}$$

此外,如一致地有$|u(t)|_1 \leqslant B$,对于 $t \in (a,b)$;则上述区域可延拓到包含如下区域:

$$\Delta = \bigcup_{t \in (a,b)} t + \Delta(B)$$

对于包含在这个区域内部的所有紧集 K,下面不等式成立:

$$\sup_{z \in K} |(\mathrm{d}^k u/\mathrm{d}^k z)(z)|_1 \leqslant 2^{1/2}(2/d)^k(k!)(1 + |u_0|_1^2)^{1/2}$$

$$d = \mathrm{dist}(K, \partial\Delta) \tag{3.19}$$

$$\sup_{z \in K} |Au(z)| \leqslant T_2(K) < \infty \tag{3.20}$$

$$\sup_{z \in K} |A(\mathrm{d}^k u/\mathrm{d}z^K)(z)| \leqslant 2^k(k!)[d(K, \partial\Delta(u_0))]^{-k} T_2(K') \tag{3.21}$$

其中 $K' \equiv \{z \in \Delta(u_0) \mid d(z, \partial\Delta(u_0)) \geqslant \frac{1}{2} d(K, \partial\Delta(u_0))\}$

证明 考虑复时间的 Galerkin 逼近,在 $\boldsymbol{H}_m = \{\boldsymbol{C}\boldsymbol{W}_1 + \cdots + \boldsymbol{C}\boldsymbol{W}_m\}$空间研究复微分系统,记 P_m 是到$\boldsymbol{H}_m$ 的投影,寻求如下问题的解:

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial z'} + DAu_m + R(u_m) - f(t), v\right) = 0, \quad \forall v \in \boldsymbol{H}_m \tag{3.22}$$

$$u_m(0) = P_m u_0 \tag{3.23}$$

$$u_m(z) = \sum_{i=1}^{m} g_i(z) \boldsymbol{W}_i, \quad g_i: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$$

利用 $Au_m(z) = \sum \lambda_i g_i(z) \boldsymbol{W}_i$,(3.22) ~ (3.23) 归结为常微分

方程组,由 Cauchy-Kovalevski 定理,在原点的邻域 Γ 存在唯一解析解 u_m,又当限制 z 到实轴上时 u_m 就归结为实时间的 Galerkin 近似.

为得到先验估计,我们取 $v = Au_m + u_m$,从(3.22)有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}, Au\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}, u\right) + (DAu, Au) + (DAu, u)$$
$$+ (R(u), Au + u) - (f(t), Au + u) = 0$$

其中为方便计,已略去 u 的下标 m. 分部积分得到:

$$\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}, u\right)\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}, u\right) + (DAu, Au) + ((Du, u))$$
$$+ (R(u), Au + u)$$
$$- (f(t), Au + u) = 0 \qquad (3.24)$$

固定 θ 在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间,将 z 表示为 $z = se^{i\theta}$,用 $e^{i\theta}$ 乘(3.24)且取实部. 由于 D 是实正定距阵,推得存在 $\alpha_0 \geqslant 0$,使得 $\mathrm{Re}(Dz, z) \geqslant \alpha_0 |z|^2, \forall z \in C^n$,利用这一结果我们得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\|u\|^2 + |u|^2) + \alpha_0 \cos\theta(|Au|^2 + \|u\|^2)$$
$$\leqslant |\sin\theta| \, \|D\|_* (|Au|^2 + \|u\|^2) + |(R(u), Au + u)|$$
$$+ |(f(t), Au + u)|$$

由(3.17a),取 $\varepsilon = \alpha_0 \cos\theta / 8$,利用(3.18),得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u|_1^2 + \alpha_0 \cos\theta(|Au|^2 + \|u\|^2)$$
$$\leqslant \|D\|_* |\sin\theta| (|Au|^2 + \|u\|^2) + \frac{\alpha_0}{8}\cos\theta |Au|^2 + k$$
$$+ c(\theta)|u|_1^{2\gamma} + M(|Au| + |u|) \qquad (3.25)$$

限制 θ 使得

$$|\theta| \leqslant \min\left(\left|\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_0}{4\|D\|_*}\right)\right|, \frac{\pi}{4}\right) \qquad (3.26)$$

于是有

$$\alpha_0 \cos\theta \geqslant 4\|D\|_* |\sin\theta|$$

在(3.25)右边利用 Young 不等式,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u|_1^2+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)$$

$$\leqslant\frac{\alpha_0}{4}\cos\theta[|Au|^2+\|u\|^2]+\frac{\alpha_0}{8}\cos\theta|Au|^2+k$$

$$+c(\theta)|u|_1^{2\gamma}+4M^2(\alpha_0\cos\theta)^{-1}+\frac{\alpha_0}{8}\cos\theta|Au|^2+M|u|^2$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u|_1^2+\alpha_0\cos\theta(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant c(\theta)|u|_1^{2\gamma}$$

$$+4M^2(\alpha_0\cos\theta)^{-1}+K \tag{3.27}$$

由(3.26),在(3.27)中我们可使系数与 θ 无关且有界,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u(se^{i\theta})|_1^2+c_1(|Au|^2+\|u\|^2)\leqslant c_2+c_3|u(se^{i\theta})|_1^{2\gamma} \tag{3.28}$$

记 $y(s)=1+|u(se^{i\theta})|_1^2$,我们得到

$$y'(s)\leqslant c_4y^\gamma(s),\qquad\forall s\geqslant 0$$

其中 $c_4=\max\{c_2,c_3\}$,积分这一不等式,得到

$$0<y(s)\leqslant(y(0)^{1-\gamma}-(\gamma-1)c_4s)^{1/(1-\gamma)}$$

$$\text{对于 } 0\leqslant s<y(0)^{1-\gamma}[(\gamma-1)c_4]^{-1}$$

这又表明,存在仅与 $|u_0|_1$ 有关而与 m 无关的常数 $T_1=y(0)^{1-\gamma}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right)[(\gamma-1)c_4]^{-1}$使得对于所有 $s\in[0,T_1(|u_0|_1)]$ 和满足(3.26)的 θ 有

$$|u_m(se^{i\theta})|_1\leqslant 2(1+|u_m(0)|_1^2)^{1/2}\leqslant 2(1+|u_0|_1^2)^{1/2} \tag{3.29}$$

因此由常微分方程解的存在性定理推得 u_m 可以延拓为包含区域 $\Delta(|u(0)|_1)$在内的某一区域中(3.22)的一个解析解.

$$\Delta(|u(0)|_1)=\{z=se^{i\theta}|0<s<T_1(|u_0|_1),\theta\text{ 满足(3.26)}\}.$$

而且

$$\sup|u_m(z)|_1 \leqslant 2(1+|u_0|_1^2)^{1/2},\ z\in\Delta(|u_0|_1)$$

此外，由 Cauchy 公式，

$$\frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d}z^k}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|z-\eta|=d/2}u_m(\eta)(\eta-z)^{-(k+1)}\mathrm{d}\eta$$

其中 $d=d(z,\partial\Delta(|u_0|_1))$，因此

$$\left|\frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d}z^k}\right|_1 \leqslant \left(\frac{2}{d}\right)^k k!\sup_{z\in\Delta(|u_0|_1)}|u_m(z)|_1$$

特别对于 $\Delta(|u_0|_1)$的一个紧子集 K 有

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d}z^k}\right|_1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right)^k k!(1+|u_0|_1^2)^{1/2} \tag{3.30}$$

其中 $d=d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))$.

现在推导 u_m 在$D(A)$中的先验估计，注意到对于 $\Delta(u_0)$的任一紧子集 K 和对任何 $z=se^{i\theta}\in K$，我们有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|u_m(se^{i\theta})|_1^2\right|=2\left|\left(\left(\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}z},u_m\right)\right)+\left(\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}z},u_m\right)\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}z}\right|_1|u_m|_1 \leqslant 4\cdot\frac{2}{d}(1+|u_0|_1^2) \tag{3.31}$$

其中 $d=d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))$，将(3.31)代入(3.27)，丢去 $\|u_m\|^2$，推出

$$c_1|Au_m|^2\leqslant c_2+c_3(2(1+|u_0|_1^2))^\gamma+4\cdot\frac{2}{d}(1+|u_0|_1^2) \tag{3.32}$$

因此对任何紧集 $K\subset\Delta(|u_0|_1)$，我们得到 u_m 在$L^\infty(K,D(A))$中有与 m 无关的一致有界性，

$$\sup_{z\in K}|Au_m(z)|\leqslant T_2<\infty,\ T_2=T_2(K)$$

由 Cauchy 公式，对任何使得 $d(K,\partial\Delta(|u_0|_1))\geqslant d>0$ 的紧集 K，有

$$A\frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d}z^k}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|z-\eta|=\frac{d}{2}}Au_m(\eta)(\eta-z)^{-(k+1)}d\eta,\ z\in K$$

记

$$K' = \left\{ z \in \Delta(|u_0|_1) \mid d(z, \partial\Delta(|u_0|_1)) \geqslant \frac{1}{2} d(K, \partial\Delta(|u_0|_1)) \right\}$$

$\supset K$，我们得到

$$\left| A \frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d} z^k}(z) \right| \leqslant 2^k k! [d(K, \partial\Delta(|u_0|_1))]^{-k} \sup_{z \in K'} |A u_m(z)|$$

$$\sup_{z \in K} \left| A \frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d} z^k}(z) \right| \leqslant 2^k k! [d(K, \partial\Delta(|u_0|_1))]^{-k} T_2(K') \quad (3.33)$$

由于 $u_m : \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}(A)$ 在 $\Delta(|u_0|_1)$ 中一致有界而且解析，由 Montel 定理，对序列 $\{u_m\}$ 存在子列，在 $\Delta(|u_0|_1)$ 的每一紧子集中以 $\boldsymbol{D}(A)$ 范一致收敛到 u^*，且 $u^* \in \boldsymbol{D}(A)$ 在 $\Delta(|u_0|_1)$ 中解析，此外由于 $u_m \Big|_{(0,T)}$ 是相应的实 Galerkin 近似且 $u_m \Big|_{(0,T)} \rightarrow u$，(3.15)，(3.16)的解，因此必有 u^* 是 u 到包含 $\Delta(|u_0|_1)$ 区域上的一个解析延拓. 因此 u^* 是 u 到 $\Delta(|u_0|_1)$ 的唯一解析延拓，故可用 u 表示 u^*，故 $\{u_m\}$ 的任何收敛子列收敛到 u，从而 $u_m \rightarrow u$，显然有

$$\sup_{z \in K} |A u(z)| \leqslant T_2(K), \ \forall \text{ 紧集 } K \subset \Delta(|u_0|_1)$$

类似地，(3.30)和(3.33)推得在 $\Delta(|u_0|_1)$ 的紧集上以 $\boldsymbol{D}(A)$ 范一致地有

$$\frac{\mathrm{d}^k u_m}{\mathrm{d} z^k} \rightarrow \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d} z^k}$$

而且 u 也满足(3.19)～(3.21). 上述一致性收敛结果结合(3.17b)就推得 u 是(3.15)～(3.16)的解.

如果在 $t \in (\alpha, \beta)$ 上 $|u|_1 \leqslant R < \infty$，则上面对于 $t = 0$ 的推理可用对任何 $t \in (\alpha, \beta)$ 来代替，进而有 $u : \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}(A)_{\boldsymbol{C}}$ 是在如下开集中取值于 $\boldsymbol{D}(A)$ 的时间解析函数：

$$\bigcup_{t \geqslant 0} \{t + \Delta(|u(t)|_1)\} \supset \bigcup_{t \in (\alpha, \beta)} \{t + \Delta(R)\}$$

现在我们回到(3.12)～(3.13)，利用

$$(B(u, u), u) = 0$$

和 Sobolev 嵌入定理，改写(3.7)为

$$|(B(u,u),v)| \leqslant c|u|^{1/2}\|u\||Au|^{1/2}|v|$$

我们有

$$\begin{aligned}|(B(u,u),Au+u)| &\leqslant c|u|^{1/2}\|u\||Au|^{3/2} \\ &\leqslant \varepsilon|Au|^2+\frac{c}{\varepsilon}|u|_1^4\end{aligned}$$

即 $B(u,u):\boldsymbol{D}(A)\rightarrow\boldsymbol{H}$,(3.17)被满足,而 f 与 t 无关且在 L^2 中有界,故(3.18)也被满足,从而由定理 3.2 得到,对于方程

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\nu Aq+Q_NB(u,u)=Q_Nf \tag{3.34}$$

其中 $u(t)=P_Nu+Q_Nu=p+q$.我们有

定理3.3 在定理 3.1 假设条件下,下面结论成立:

$$\begin{aligned}&|q(t)| \leqslant K_0\lambda_{N+1}^{-1} \\ &\|q(t)\| \leqslant K_1\lambda_{N+1}^{-1/2} \\ &|Aq(t)| \leqslant K_2 \\ &\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)\right| \leqslant K_0'\lambda_{N+1}^{-1}\end{aligned} \tag{3.35}$$

其中 K_0,K_0',K_1,K_2 仅与 $\nu,|f|,|u_0|$ 有关.

我们用非线性 Galerkin 方法构造近似惯性流形 $\mu_0=\mathrm{graph}(\Phi_0)$,其中

$$\nu A\Phi_0(p)+Q_NB(p,p)=Q_Nf,\ p\in H_N \tag{3.36}$$

即

$$\Phi_0(p)=(\nu A)^{-1}[Q_Nf-Q_NB(p,p)] \tag{3.36$'$}$$

定理3.4 设 t 充分大,使得

$$t\geqslant t_0 \qquad (t_0\text{ 见定理 3.1}) \tag{3.37}$$

则有

$$\|q(t)-\Phi_0(p)\| \leqslant K_3\lambda_{N+1}^{-1} \tag{3.38}$$

证明 用(3.34)减(3.36′)得到

$$\nu A(q(t)-\Phi_0(p))=-Q_N(B(p+q,q)+B(q,p))-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

于是

$$\nu|A(q(t)-\Phi_0(p))|\leqslant c|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|q\|$$
$$+c|q|^{1/2}|Aq|^{1/2}\|p\|+\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|$$
$$\leqslant\lambda_{N+1}^{-1/2}(cM_0^{1/2}M_1^{1/2}+CM_1+K_0'\lambda_{N+1}^{-1/2})K_2$$

从而有 $\|q(t)-\Phi_0(p)\|\leqslant K_3\lambda_{N+1}^{-1}$

下面我们构造 AIM μ^s:

记

$$\mathscr{B}=\{p\in H_N,\|p\|\leqslant 2M_1\}$$
$$\mathscr{B}^{\perp}=\{q\in Q_N,\|q\|\leqslant 2M_1\}$$

可以证明,对于充分大的 N,存在一个映射 $\phi^s:\mathscr{B}\to Q_NV$ 使得

$$\phi^s(p)=(\nu A)^{-1}[Q_Nf-Q_NB(p+\phi^s,p+\phi^s)],\ \forall p\in\mathscr{B} \tag{3.39}$$

定理3.5 令 N 充分大使得

$$\lambda_{N+1}\geqslant\max\left\{\frac{r_1^2}{4M_1^2},4r_2^2\right\} \tag{3.40}$$

则存在唯一映射 $\phi^s:\mathscr{B}\to Q_NV$,满足(3.39),此外,

$$\|\phi^s(p)\|\leqslant r_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.41}$$

其中 $r_1=8(\nu^{-1}M_1^2L^{\frac{1}{2}}+8c\nu^{-1}M_1^2+\nu^{-1}|f|$, $L=1+\log\dfrac{\lambda_m}{\lambda_1}$, $r_2=2c\nu^{-1}M_1(L^{\frac{1}{2}}+3)$.

证明 令 $p\in\mathscr{B}$ 固定,我们定义 $T_p:\mathscr{B}^{\perp}\to Q_NV$,使得

$$T_p(q)=(\nu A)^{-1}[Q_Nf-Q_NB(p+q,p+q)]$$

只须证明 T_p 有唯一不动点.首先我们表明 $T_p:\mathscr{B}^{\perp}\to\mathscr{B}^{\perp}$.令 $q\in\mathscr{B}^{\perp}$, $W\in H$, $|W|=1$,则

$$|(A^{1/2}T_p(q),W)|$$
$$\leqslant\nu^{-1}[|(B(p+q,p+q),A^{-1/2}Q_NW)|$$
$$+|A^{-1/2}Q_Nf||W|]$$
$$\leqslant\nu^{-1}[|(B(p,p+q),A^{-1/2}Q_NW)|$$

$$+ \left| B(q,p+q,),A^{-1/2}Q_NW) \right|] + \nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-1/2} | f |$$

$$\leqslant \nu^{-1}[c \| p+q \| \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \| p \| \left(1 + 2\log\left(\frac{|Ap|}{\| p \| \lambda_1^{1/2}}\right)\right)^{1/2}$$

$$+ c | q |^{1/2} \| q \|^{1/2} \| p+q \| \left| A^{-1/2}Q_NW \right|^{1/2} | W |^{1/2}$$

$$+ \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} | f |]$$

$$\leqslant c\nu^{-1} \cdot 4M_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2M_1\left(1 + \log\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^{1/2}$$

$$+ c\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \cdot 8M_1^2 + \nu^{-1} | f | \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= r_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$

于是

$$\| T_p(q) \| \leqslant r_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

其中

$$r_1 = 8c\nu^{-1}M_1^2L^{\frac{1}{2}} + 8c\nu^{-1}M_1^2 + \nu^{-1} | f |$$

由(3.40),

$$\| T_p(q) \| \leqslant 2M_1$$

现证 T_p 是压缩的,注意到

$$\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta = (\nu A)^{-1}[Q_NB(p+q,\eta) + Q_NB(\eta,p+q)], \quad \forall \eta \in Q_NV$$

令 $W \in H, |W| = 1$,则

$$\left|(A^{1/2}\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\eta, W)\right| \leqslant \nu^{-1}\left|(B(p,\eta),A^{-\frac{1}{2}}Q_NW)\right|$$

$$+ \nu^{-1}\left|(B(q,\eta),A^{-\frac{1}{2}}Q_NW)\right| + \nu^{-1}\left|(B(\eta,p+q),A^{-\frac{1}{2}}Q_NW)\right|$$

$$\leqslant \nu^{-1}c \| \eta \| \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \| p \| \left(1 + \log\left(\frac{|Ap|}{\| p \| \lambda_1^{1/2}}\right)\right)^{1/2}$$

$$+ \nu^{-1}c | q |^{1/2} \| q \|^{1/2} \| \eta \| \left| A^{-\frac{1}{2}}Q_NW \right|^{1/2} | W |^{1/2}$$

$$+\nu^{-1}c|\eta|^{1/2}\|\eta\|^{1/2}\|p+q\||A^{-\frac{1}{2}}Q_NW|^{1/2}|W|^{1/2}$$

$$\leqslant[\nu^{-1}c2M_1L^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}c6M_1]\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\|\eta\|$$

故

$$\left\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\right\|_{\mathscr{L}(Q_NV)}\leqslant r_2\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

其中 $r_2=\nu^{-1}c2M_1L^{\frac{1}{2}}+\nu^{-1}c6M_1$，由(3.40)

$$\left\|\frac{\partial}{\partial q}T_p(q)\right\|\leqslant\frac{1}{2}$$

由压缩映像原理得定理结论.

注:由定理 3.2 易知 $\mu^s=\text{graph}\phi^s(p)$是解析流形.

定理3.6 设 N 充分大使得(3.40)成立,则对于(3.12)～(3.13)的每个解,我们有

$$\|q(t)-\phi^s(p)\|\leqslant\frac{2K'_0}{\nu}\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{2}},\quad t\geqslant t_0 \tag{3.44}$$

其中 t_0,K'_0如定理 3.1,3.3 中所述.

证明 令 $\Delta(t)=q(t)-\phi^s(p(t))$,于是

$$\nu A\Delta+Q_N[B(\Delta,p+\phi^s)+B(p+q,\Delta)]+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0$$

上式与 Δ 在 H 中取内积,有

$$\nu\|\Delta\|^2\leqslant|(B(\Delta,p+\phi^s),\Delta)|+\left|\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\Delta\right)\right|$$

$$\leqslant c|\Delta|\ \|\Delta\|\ \|p+\phi^s\|+\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right||\Delta|$$

$$\leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\|\Delta\|^2\cdot 3M_1+K'_0\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{2}}\|\Delta\|$$

从而

$$\|\Delta\|\leqslant c\nu^{-1}\cdot 3M_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\|\Delta\|+K'_0\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{2}}$$

注意(3.40),有

$$\|\Delta\|\leqslant\frac{2K'_0}{\nu}\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{2}}$$

利用类似于对二维 Navier-Stokes 方程的处理方法我们研究二维 Newton-Boussinesq 方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + J(\psi,\Delta\psi) = \Delta^2\psi - \frac{Ra}{P_r}\frac{\partial\theta}{\partial x} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + J(\psi,\theta) = \frac{1}{P_r}\Delta\theta \tag{3.46}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ \theta|_{t=0} = \theta_0(x,y) \tag{3.47}$$

$$\begin{gathered}\psi(x+2D,y,t) = \psi(x,y,t),\ \psi(x,y+2D,t) = \psi(x,y,t)\\ \theta(x+2D,y,t) = \theta(x,y,t),\ \theta(x,y+2D,t) = \theta(x,y,t)\end{gathered} \tag{3.48}$$

其中$(\psi_y,-\psi_x)$为速度向量，θ：流函数；$P_r>0$ 是 Prandtl 数，$R_a>0$ 是 Rayleigh 数，$J(u,v)=u_yv_x-u_xv_y$.

记 $D(A)=\{u\in H^2(\Omega),u$ 满足(3.48)$\}$，$\Omega=(0,2D)\times(0,2D)$，

$$H_a=\{\theta\in H:|m(\theta)| = \left|\frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega\theta(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\alpha\},\quad A=-\Delta,$$

下面结论成立：

1. 如果$(\psi_0,\theta_0)\in H^2\times H^1$，则问题(3.45)～(3.48)具有唯一整体解$(\psi,\theta)$，使对所有 $T>0$，有

$$\psi\in L^\infty(R^+,H^2(\Omega)),\ \Delta\psi\in L^2(0,T;H^1(\Omega)),$$
$$\theta\in L^\infty(R^+,H^1(\Omega)),\ \Delta\theta\in L^2(0,T;H)$$

2. 如果 $\psi_0\in H^4,\theta_0\in H_a\cap H^2$，则(3.45)～(3.48)的解$(\psi,\theta)$有如下估计：

$$|A\psi|,|A^{3/2}\psi|,\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi\right|,|\theta|,|A^{\frac{1}{2}}\theta|,\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta\right|\leqslant M_0,\ \forall\, t\geqslant t_*$$

将(3.45)，(3.46)进行谱分解，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi_1 + P_NJ(\psi,A\psi) + A^2\psi_1 - \frac{R_a}{P_r}P_NB(\theta) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi_2 + Q_NJ(\psi,A\psi) + A^2\psi_2 - \frac{R_a}{P_r}Q_NB(\theta) = 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_1 + P_N J(\psi,\theta) + \frac{1}{P_r}A\theta_1 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2 + Q_N J(\psi,\theta) + \frac{1}{P_r}A\theta_2 = 0 \tag{3.50}$$

其中 $\psi_1 = P_N\psi, \psi_2 = Q_N\psi; \theta_1 = P_N\theta, \theta_2 = \theta_N\theta$.

引理3.7 设 $\psi_0 \in H^4, \theta_0 \in H_a \cap H^2$,则存在仅与始值和 R 有关的 t_*,当 $t \geqslant t_*$ 时有

$$\begin{aligned} &|A^{\frac{3}{2}}\psi_2(t)| \leqslant M\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi_2\right| \leqslant M\lambda_{N+1}^{-1} \\ &|A^{\frac{1}{2}}\theta_2(t)| \leqslant M\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}, \quad \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2\right| \leqslant M\lambda_{N+1}^{-1} \end{aligned} \tag{3.51}$$

其中 $|\psi_0|_{H^4} \leqslant R, |\theta_0|_{H^2} \leqslant R$.

证明 将(3.49)与 $A^2\psi_2$ 在 H 中取内积得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{3/2}\psi_2|^2 + (J(\psi,A\psi),A^2\psi_2) + |A^2\psi_2|^2 \\ - \frac{R_a}{P_r}(B(\theta),A^2\psi_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

利用

$$|J(u,v)| \leqslant c|A^{\frac{3}{2}}u||A^{\frac{1}{2}}v|$$

我们有

$$\begin{aligned} |(J(\psi,A\psi),A^2\psi_2)| &\leqslant c|A^{3/2}\psi|^2|A^2\psi_2| \\ &\leqslant c|A^2\psi_2| \quad (\text{由结论 } 2) \end{aligned}$$

$$|B(\theta),A^2\psi_2)| \leqslant |A^{\frac{1}{2}}\theta||A^2\psi_2| \leqslant c|A^2\psi_2|$$

利用 Young 不等式,从(3.52)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{3/2}\psi_2|^2 + |A^2\psi_2|^2 \leqslant c|A^2\psi_2| \leqslant \frac{1}{2}|A^2\psi_2|^2 + c$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A^{3/2}\psi_2|^2 + \lambda_{N+1}|A^{3/2}\psi_2| \leqslant c$$

这就推得

$$|A^{3/2}\psi_2(t)|^2 \leqslant |A^{3/2}\psi_2(t_*)|^2 \mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}(t-t_*)} + c\lambda_{N+1}^{-1}$$

$$\leqslant |A^{3/2}\psi(t_*)|^2 e^{-\lambda_{N+1}(t-t_*)} + c\lambda_{N+1}^{-1}(\text{由结论 } 2)$$
$$\leqslant c\lambda_{N+1}^{-1},\ \forall t \geqslant t'_* \qquad (3.53)$$

其中 $t'_* = \sup_N \max\left\{t_*, t_* + \lambda_{N+1}^{-1}\log\dfrac{M^2\lambda_{N+1}}{c}\right\}$.

将 $A\theta_2$ 与(3.50)在 H 中取内积,类似于(3.53)的推导,得到 $|A^{\frac{1}{2}}\theta|^2 \leqslant c\lambda_{N+1}^{-1}, \forall t \geqslant t'_*$.

将(3.49),(3.50)对 t 求导数,类似地可以得到引理中其他结论.

$$\text{记 } B_N = \{\psi \in P_N H : |A^{\frac{3}{2}}\psi_1| \leqslant 2M_0\}$$
$$B_N^{\perp} = \{g \in Q_N H : |A^{\frac{3}{2}} g| \leqslant 2M_0\}$$
$$O_N = \{\theta_1 \in P_N H : |A^{\frac{1}{2}}\theta_1| \leqslant 2M_0\}$$
$$O_N^{\perp} = \{h \in Q_N H : |A^{\frac{1}{2}} h| \leqslant 2M_0\}$$

定义映射 $G(\psi_1, \theta_1) = (g, h): B_N \times O_N \rightarrow B_N^{\perp} \times O_N^{\perp}$:

$$A^2 g + Q_N J(\psi_1 + g, A\psi_1 + Ag) - \frac{R_a}{P_r} Q_N B(\theta_1 + h) = 0 \qquad (3.54)$$

$$\frac{1}{P_r} Ah + QJ(\psi_1 + g, \theta_1 + h) = 0 \qquad (3.55)$$

引理3.8 存在仅与始值有关的正整数 N_0,使当 $N \geqslant N_0$ 时,(3.54)~(3.55)对所有 $(\psi_1, \theta_1) \in B_N \times O_N$,有唯一解 $(g, h) \in B_N^{\perp} \times O_N^{\perp}$.

证明 固定 (ψ_1, θ_1),定义映射 $\widetilde{G}(g_1, h_1) = (g, h)$:

$$A^2 g + Q_N J(\psi_1 + g_1, A\psi_1 + Ag_1) - \frac{R_a}{P_r} Q_N B(\theta_1 + h_1) = 0 \qquad (3.56)$$

$$\frac{1}{P_r} Ah + Q_N J(\psi_1 + g_1, \theta_1 + h_1) = 0 \qquad (3.57)$$

我们证明只要 N 适当大，$\widetilde{G}$ 映 $B_N^\perp \times O_N^\perp$ 到其自身. 由(3.54)

$$|A^2 g| \leqslant c|A^{\frac{3}{2}}\psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_1|^2 + \frac{R_a}{P_r}|A^{\frac{1}{2}}\theta_1 + A^{\frac{1}{2}}h_1| \leqslant c$$

于是，$|A^{\frac{3}{2}}g| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$，只要 N 适当大，有 $g \in B_N^\perp$; 由(3.55)有

$$\frac{1}{P_r}|Ah| \leqslant |J(\psi_1 + g_1, \theta_1 + h_1)|$$

$$\leqslant c|A^{\frac{3}{2}}g_1 + A^{\frac{3}{2}}\psi_1||A^{\frac{1}{2}}\theta_1 + A^{\frac{1}{2}}h_1| \leqslant c$$

从而 $|A^{\frac{1}{2}}h| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$，也有 $h \in O_N^\perp$.(N 适当大).

$\widetilde{G}$ 是压缩的：

令 $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in B_N^\perp \times O_N^\perp$. 由(3.54)有

$$A^2 g(g_1, h_1) - A^2 g(g_2, h_2) + Q_N J(g_1 - g_2, A\psi_1 + Ag_1)$$
$$+ Q_N J(\psi_1 + g_2, Ag_1 - Ag_2) - \frac{R_a}{P_r} Q_N B(h_1 - h_2) = 0$$

故

$$|A^2 g(g_1, h_1) - A^2 g(g_2, h_2)|$$
$$\leqslant c|A^{\frac{3}{2}}g_1 - A^{\frac{3}{2}}g_2||A^{\frac{3}{2}}\psi_1 + A^{\frac{3}{2}}g_1|$$
$$+ c|A^{\frac{3}{2}}(g_1 - g_2)||A^{\frac{3}{2}}(\psi_1 + g_2)| + c|A^{\frac{1}{2}}(h_1 - h_2)|$$

这就推得

$$|A^{\frac{3}{2}}g(g_1, h_1) - A^{\frac{3}{2}}g(g_2, h_2)|$$
$$\leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(|A^{\frac{3}{2}}(g_1 - g_2)| + |A^{\frac{3}{2}}(h_1 - h_2)|)$$

类似地从(3.55)，我们得到

$$\frac{1}{P_r}|Ah(g_1, h_1) - Ah(g_2, h_2)|$$
$$\leqslant |Q_N J(g_1 - g_2, \theta_1 + h_1)| + |Q_N J(\psi_1 + g_2, h_1 - h_2)|$$
$$\leqslant c|A^{\frac{3}{2}}(g_1 - g_2)| + c|A^{\frac{1}{2}}(h_1 - h_2)|$$

从而

$$|A^{\frac{1}{2}}h(g_1,h_1)-A^{\frac{1}{2}}h(g_2,h_2)|$$
$$\leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(|A^{\frac{3}{2}}(g_1-g_2)|+|A^{\frac{1}{2}}(h_1-h_2)|)$$

由于 $N\to+\infty$ 时 $\lambda_{N+1}\to+\infty$，故只要 N 充分大，例如 $N\geqslant N_0$，就得到 $\widetilde{G}$ 的压缩性，由压缩映像原理得到引理 3.8.

令 $\Sigma=\mathrm{graph}(G)$，我们有

定理3.9 存在仅与始值有关的 N_0，仅与始值及 R 有关的 t_*，使当 $N\geqslant N_0$ 和 $t\geqslant t_*$ 时，对于(3.45)～(3.48)的任何解 $(\psi(t),\theta(t))$，在 $H^2\times H$ 空间 Σ 与解的距离由 $M\lambda_{N+1}^{-2}$ 所控制. 其中 $|\psi_0|_{H^4}\leqslant R$，$|\theta_0|_{H^2}\leqslant R$.

证明 将(3.54)与(3.45)相减，得到

$$A^2g-A^2\psi_2+Q_NJ(g-\psi_2,A\psi_1+Ag)+Q_NJ(\psi,Ag-A\psi_2)$$
$$-\frac{R_a}{P_r}Q_NB(h-\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi_2=0$$

因此

$$|A^2g-A^2\psi_2|\leqslant c|A^{\frac{3}{2}}(g-\psi_2)||A^{\frac{3}{2}}(\psi_1+g)|$$
$$+c|A^{\frac{3}{2}}\psi||A^{\frac{3}{2}}(g-\psi_2)|+c|A^{\frac{1}{2}}(h-\theta_2)|$$
$$+\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\psi_2\right|$$
$$\leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}|A^2(g-\psi_2)|$$
$$+c|A^{\frac{1}{2}}(h-\theta_2)|+c\lambda_{N+1}^{-1}$$

从而存在 m_0，当 $m\geqslant m_0$，有 $c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}$，有

$$|A^2g-A^2\psi_2|\leqslant c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}|A(h-\theta_2)|+c\lambda_{N+1}^{-1}\tag{3.58}$$

类似地，将(3.55)与(3.46)相减，有

$$\frac{1}{P_r}(Ah-A\theta_2)+Q_NJ(g-\psi_2,\theta_1+h)$$
$$+Q_NJ(\psi,h-\theta_2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2=0$$

这又推得

$$
\begin{aligned}
|A(h-\theta_2)| \leqslant & c|A^{\frac{3}{2}}(g-\psi_2)||A^{\frac{3}{2}}(\theta_1+h)| \\
& + c|A^{\frac{3}{2}}\psi||A^{\frac{1}{2}}(h-\theta_2)| + \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_2\right| \\
\leqslant & c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}|A^2(g-\psi_2)| \qquad (3.59) \\
& + c\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}|A(h-\theta_2)| + c\lambda_{N+1}^{-1}
\end{aligned}
$$

由(3.58),(3.59),取 N 适当大,就得到

$$|A^2(g-\psi_2)| + |A(h-\theta_2)| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-1}$$

这表明

$$|Ag - A\psi_2| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-2}, \quad |h-\theta_2| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-2}$$

最后有

$$
\begin{aligned}
d_{H^2\times H}((\psi,\theta),\Sigma) & \leqslant |\psi-(\psi_1+g)|_{H^2} + |\theta-(\theta_1+h)| \\
& \leqslant |\psi_2 - g|_{H^2} + |\theta - h| \\
& \leqslant c|A\psi_2 - Ag| + |\theta_2 - h| \\
& \leqslant c\lambda_{N+1}^{-2} \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

§4 Gevrey 类正则性和指数逼近的 AIM

研究方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + DAu(t) + R(u) = f(t), t \in R_+ \qquad (4.1)$$

$$u(0) = u_0 \qquad (4.2)$$

赋以周期边界条件,算子 A 和矩阵 D 同§3所设.为方便起见,假设

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, t \geqslant 0, \text{和所有解 } u \qquad (4.3)$$

$\Omega = [0,2\pi]^n$,由关于 A 的假设知,相应于特征值 $\{\lambda_j\}_{j\in Z^n}$ 的特征

向量族 $\{e^{ij\cdot x}\}_{j\in Z^n}$ 构成空间 $L^2(\Omega)=H$ 的基，于是对于 $u\in D(A)$，有

$$u=\sum u_j e^{ij\cdot x}, u_j=(u_j^1,\cdots,u_j^n)\in \boldsymbol{C}^n$$

$$|u|^2=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\sum|u_j|^2<\infty$$

$$|Au|^2=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\sum|\lambda_j|^2|u_j|^2$$

我们给出 Gevrey 类函数的定义.

定义：如果对某个 $\sigma>0$，有

$$|e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}f|^2=\sum_{j\in Z^n}e^{2\sigma\lambda_j^{\frac{1}{2}}}|f_j|^2<\infty \tag{4.4}$$

则称 f 是 Gevrey 类 $D(e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}})$ 函数，且记

$$|f|_\sigma^2=|e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}f|^2 \tag{4.5a}$$

注意对周期边界条件，若记

$$|f|_\sigma^2=|e^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}f|^2=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\sum e^{2\sigma|j|}|f_j|^2 \tag{4.5b}$$

则(4.5a)与(4.5b)是等价的.

我们再研究具有周期边界条件的始值问题(4.1)～(4.2)，且假设非线性项 R 是 $\{D^\alpha\}_{|\alpha|\leqslant d}$ 的多项式，由于 Fourier 变换是 L^2 上等距，存在 Fourier 系数 u_j 和 R 的多重指数 α_i 的函数 F，使得

$$(R(u),Au)=F(u_j,j^{\alpha_i})$$

假设存在 γ,K 和 C，使对所有 $\varepsilon>0$，F 满足

$$|F(|u_j|,|j^{\alpha_i}|)|\leqslant\varepsilon|Au|^2+C(\varepsilon)\|u\|^{2\gamma}+K \tag{4.6}$$

和

$$|f(t)|_\sigma\leqslant M,\forall t\in R_+ \tag{4.7}$$

其中 $M,\sigma>0$ 是常数，则有

定理 4.1 设 $u_0\in V$，f 满足(4.7)，微分多项式 R 满足(4.6)和(3.17b)，则存在仅与 $\|u_0\|$ 有关的 T_* 和复平面上区域 $\Delta\supseteq(0,T_*)$，使得下面结论成立：

(i) 存在(4.1)~(4.2)唯一正则解 u，使得映射：$t\to[A^{\frac{1}{2}}\exp(\phi(t)A^{\frac{1}{2}})]u(t)$ 在 $(0,T_*)\subset\Delta$ 上取值于 H 中是解析的，$\phi(t)=\min(t,\sigma,T_*)$.

(ii)如果解 u 存在且在 V 中对所有正的 t 是一致有界的，则 u 取值于 $D(A^{\frac{1}{2}}\exp(\sigma A^{\frac{1}{2}}))$ 且在 $(0,\infty)$ 和包含 $(0,\infty)$ 的 Δ 上是解析的.

为证明定理 4.1，我们需要：

引理 4.2 设对 $\tau>0$，$u\in D(A^{\frac{1}{2}}e^{\tau A^{\frac{1}{2}}})$，则如果 R 满足(4.6)，我们有

$$|(R(u),Au)_\tau|\leqslant\varepsilon|Au|_\tau^2+C(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{2\gamma}+K \quad (4.8)$$

证明 我们令

$$u=\sum u_j e^{ij\cdot x}$$

定义：

$$u^*=\sum u_j^* e^{ij\cdot x}=\exp(\tau A^{\frac{1}{2}}u)$$

其中 $u_j^*=e^{\tau|j|}u_j, j\in Z^n$.

对于一般的微分多项式 R，全部写出是很繁琐的，我们仅写出单项

$$R(u)=\sum\prod_{k=1}^{d}D^{\alpha_k}u^{i_k}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 是任意多重指标，$i_1,\cdots,i_d$ 是 1 到 n 间整数，$u=(u^1,\cdots,u^n)$；因此我们有

$$(R(u),Au)_\tau=(R(u),\exp(2\tau A^{\frac{1}{2}})Au)$$

$$=\int\Big(\prod_{k=1}^{d}\sum_{j_k\in Z^n}u_{j_k}^{i_k}j_k^{\alpha_k}e^{ij_k\cdot x}\Big)\Big(\sum_{j_0\in Z^n}\bar{u}_{j_0}^{i_0}\lambda_{j_0}e^{2\tau|j_0|}e^{-ij_0\cdot x}\Big)dx$$

上述积分当且仅当

$$-j_0+j_1+j_2+\cdots+j_k=0$$

时不为零，于是有

$$(R(u),Au)_\tau=(2\pi)^n\sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0}\sum u_{j_1}^{i_1}\cdots u_{j_d}^{i_d}\bar{u}_{j_0}^{i_0}\,j_1^{\alpha_1}\cdots j_d^{\alpha_d}\lambda_{j_0}e^{2\tau|j_0|}$$
$$\leqslant(2\pi)^n\sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0}\sum\left|u_{j_0}^{*i_0}\right|\cdots\left|u_{j_d}^{*i_d}\right|\left|j_1^{\alpha_1}\right|\cdots$$
$$\left|j_d^{\alpha_d}\right|\lambda_{j_0}e^{\tau(|j_0|-|j_1|-\cdots-|j_d|)}$$

但是$|j_0|=|j_1+j_2+\cdots+j_d|\leqslant|j_1|+\cdots+|j_d|$,故

$$e^{\tau(|j_0|-|j_1|-\cdots-|j_d|)}\leqslant 1$$

我们得到

$$|(R(u),Au)_\tau|\leqslant(2\pi)^n\sum_{j_1+\cdots+j_d=j_0}\sum\left|u_{j_0}^{*i_0}\right|\cdots$$
$$\left|u_{j_d}^{*i_d}\right|\left|j_1^{\alpha_1}\right|\cdots\left|j_d^{\alpha_d}\right|\lambda_{j_0}$$

利用$|j^\alpha|\leqslant e^{\tau|j|}$,$u^*=\exp(\tau A^{\frac{1}{2}})u$,我们有

$$|(R(u),Au)_\tau|\leqslant|F(|u_j^*|,|j^{\alpha_i}|)|$$
$$\leqslant\varepsilon|Au^*|^2+C(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u^*|^2+K$$

定理 4.1 的证明,证明框架类同于定理 3.2,以复时间 z,以$|\cdot|_\tau$范数证明解的先验估计,在复平面建立一个区域 Δ,使解在其中一致有界,然后对投影空间维数 m 取极限,此外,由于这里与定理 3.2 证明不同的仅是先验估计的推导,我们仅概略地叙述 Δ 和省略极限过程,再者,为简化符号我们仅考虑整个问题的解,故所有计算都是形式的.

我们复值化(4.1),$\phi(t)=\min(t,\sigma)$,$z=se^{i\theta}$,$s>0$,$\cos\theta>0$,$E_s=\exp(\phi(s\cos\theta)A^{\frac{1}{2}})$,$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$固定,将(4.1)与 $Au(se^{i\theta})$ 在 $D(E_s)$中取内积,再乘以 $e^{i\theta}$后取实部,这就推得:

$$\operatorname{Re}e^{i\theta}\left\{\left(E_s\frac{\partial u}{\partial z},E_sAu(se^{i\theta})\right)+(E_sDAu,E_sAu)+(E_sR(u),E_sAu)\right\}$$
$$=\operatorname{Re}e^{i\theta}(E_sf,E_sAu)\tag{4.9}$$

利用$\frac{d}{ds}=e^{-i}\frac{d}{dz}$,我们得到:

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}\left\{\left(E_s\frac{\partial u}{\partial z},E_sAu(se^{i\theta})\right)\right\}$$

$$=\operatorname{Re}\left(A^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(E_su(se^{i\theta}))-\phi'(s\cos\theta)(\cos\theta)E_sAu,E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\phi(s\cos\theta)}$$

$$-(\cos\theta)\phi'(s\cos\theta)|Au|_{\phi(s\cos\theta)}|A^{\frac{1}{2}}u|_{\phi(s\cos\theta)}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|A^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2_{\phi(s\cos\theta)}-\frac{\alpha_0\cos\theta}{4}|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)}$$

$$-\left(\frac{\cos\theta}{\alpha_0}\right)|A^{\frac{1}{2}}u|^2_{\phi(s\cos\theta)} \tag{4.10}$$

又，

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}(E_sDAu,E_sAu)\geqslant\cos\theta\alpha_0|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)}$$

$$-|\sin\theta|\,\|D\|_*|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)}$$

限制 θ：$|\theta|\leqslant\min\left(\left|\tan^{-1}\frac{\alpha_0}{4\|D\|_*}\right|,\frac{\pi}{4}\right)$，我们得到：

$$\operatorname{Re} e^{i\theta}(E_sDAu,E_sAu)\geqslant\frac{3}{4}\cos\theta\alpha_0|Au|^2_{\phi(s\cos\theta)} \tag{4.11}$$

将(4.10)，(4.11)代入(4.9)且将 $\phi(s\cos\theta)$写为 ϕ，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u\|^2_\phi+\frac{\alpha_0\cos\theta}{2}|Au|^2_\phi\leqslant|(f,Au)_\phi|+|(R(u),Au)_\phi| \tag{4.12}$$

同定理 3.2 一样地处理$|(f,Au)_\phi|$，利用引理 4.2，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|u(se^{i\theta})\|^2_\phi+c_1|Au(se^{i\theta})|^2_\phi\leqslant c_2+c_3|u(se^{i\theta})|^{2\gamma}_\phi \tag{4.13}$$

其中常数仅与始值有关，而与 θ 无关（上述限制的 θ），类同定理 3.2，记

$$y(s)=1+|E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2 \tag{4.14}$$

有

$$y'(s)\leqslant c_4y^\gamma(s) \tag{4.15}$$

于是推得

$$|E_sA^{\frac{1}{2}}u(se^{i\theta})|^2 \leqslant 2 + 2|A^{\frac{1}{2}}u_0|^2 \tag{4.16}$$

在 $\Delta(\|u_0\|)$ 中成立，其中 $\Delta(\|u_0\|)$ 由下式给出：

$$0 \leqslant s \leqslant T_1(\|u_0\|) = y(0)^{1-\gamma}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}\right)\Big/((\gamma-1)c_4)$$

$$|\theta| \leqslant \min\left(\tan^{-1}\frac{\alpha_0}{4\|D\|_*}, \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.17}$$

因此，即使 $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$，则 $u(se^{i\theta}) \in D(E_sA^{\frac{1}{2}})$ 在 $\Delta(\|u_0\|)$ 中成立. 如 $\|u\|$ 在 R_+ 上一致有界 M，则 $\Delta(\|u_0\|)$ 可以延拓到 $\Delta = U_{t>0}(t + \Delta(M))$，此外类同定理 3.2，我们可以证明对任何包含在 Δ 内部的紧集 K，下述不等式成立：

$$\sup_{z\in K}\left\|\frac{d^k u}{dz^k}(se^{i\theta})\right\|_\phi \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right)^k k!(1 + \|u_0\|^2)^{\frac{1}{2}}, d = \mathrm{dist}(K, \partial\Delta) \tag{4.18}$$

$$\sup_{z\in K}|Au(se^{i\theta})|_\phi \leqslant T_2(K) < \infty \tag{4.19}$$

$$\sup_{z\in K}\left|A\frac{d^k u}{dz^k}(se^{i\theta})\right|_\phi \leqslant 2^k k![d[K, \partial\Delta(u_0)]^{-k}T_2(K') \tag{4.20}$$

其中

$$K' = \{z \in \Delta(u_0) \mid d(z, \partial\Delta(u_0)) \geqslant \frac{1}{2}d(K, \partial\Delta(u_0))\}$$

利用定理 4.1，我们可以构造出二维空间导数型 Ginzburg-Landau 方程的指数逼近型近似惯性流形.

我们研究 Ginzburg-Landau 方程(GL)：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \rho u + (1 + i\nu)\Delta u - (1 + i\mu)|u|^{2\sigma}u$$
$$+ \alpha\boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \tag{4.21}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{4.22}$$

$\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ 且 u 是 Ω 周期函数. ν, μ, α, β 为实常数，$\sigma \in N$，$\rho > 0$，$\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2$ 为实向量.

令 $u(t)=u_1(t)+i\,u_2(t)$，u_1, u_2 为实函数，且记 $u(t)=(u_1(t), u_2(t))$，则(4.21)可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\rho u+D\Delta u-D_1|u|^{2\sigma}u$$
$$+\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u)+\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2$$

其中

$$D=\begin{pmatrix}1 & -\nu\\ \nu & 1\end{pmatrix},\quad D_1=\begin{pmatrix}1 & -\mu\\ \mu & 1\end{pmatrix}$$

若记 $A=-\Delta$，

$$R(u,v,w)=-\rho w+D_1(u\cdot v)^{\sigma}w-\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w)$$
$$-\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla w)(u\cdot v) \tag{4.23}$$

则 GL 方程可以表为

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+DAu(t)+R(u(t),u(t),u(t))=0 \tag{4.24}$$

下面的结果是已知的：

1.若 $u_0\in H^2(\Omega)\times H^2(\Omega)$，且存在 $\delta>0$ 使得

$$2<\sigma<\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mu-\nu\delta^2}{1+\delta^2}\right)^2}-1},\quad \sigma\in N \tag{4.25}$$

则存在(4.24)，(4.22)问题唯一解 $u(t)$，

$$u(t)\in L^{\infty}(0,T;(H^2(\Omega))^2)\cap L^2(0,T;(H^3(\Omega))^2),\ \forall\, T>0 \tag{4.26}$$

此外存在仅与 $\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\delta,\Omega$ 有关的常数 K_1，使得

$$\|u(t)\|_{H^1}\leqslant K_1,\quad \forall\, t>t_1 \tag{4.27}$$

其中 t_1 与 $R(\|u_0\|_{H^1}\leqslant R)$ 及 $\sigma,\rho,\nu,\mu,\alpha,\beta,\boldsymbol{\lambda}_1,\boldsymbol{\lambda}_2,\delta,\Omega$ 有关.

2.下列估计对于 $u\in D(A)$ 成立：

$$|(R(u,u,u),Au+u)|\leqslant|R(u)||Au|+|R(u)||u|$$
$$\leqslant\rho\|u\||Au|+c_1\|u\|^{2\sigma+1}|Au|$$
$$+c_2\|u\|^{5/2}|Au|^{3/2}$$

$$
\begin{aligned}
&+ c_3 \| u \|^3 | Au | + \rho \| u \|^2 \\
&+ c_4 \| u \|^4 \\
\leqslant & \varepsilon | Au |^2 + c(\varepsilon) \| u \|^{4\sigma+2} + c_5
\end{aligned}
$$

$$\sigma > 2 \tag{4.28}$$

由结论 1,2,应用定理 3.5 得到

命题 4.3　设条件(4.25)满足,$u_0 \in H^2(\Omega)$,则存在 θ_0 和 T_0 使得(4.21),(4.22)问题解 $u(t)$的每个分量在下列区域中有 $D(A)$值解析延拓:

$$\Delta_1 = \{t + se^{i\theta}; t > t_1, |\theta| \leqslant \theta_0, 0 \leqslant s \leqslant T_0\}$$

t_1 同(4.27),θ_0, T_0 仅与始值有关,$|\theta_0| \leqslant \frac{\pi}{4}$. 此外存在常数 K 使得

$$|u(z)|, |A^{1/2}u(z)|, |Au(z)| \leqslant K, \quad \forall z \in \Delta_2 \tag{4.29}$$

其中 $\Delta_2 = \{z: \mathrm{Re} z \geqslant a, |\mathrm{Im} z| \leqslant b\}$,$a, b$ 仅与始值和 R 有关的常数($\| u_0 \| \leqslant R$). 同时有

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\right|, \left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right|, \left|A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\right| \leqslant K_2, \quad \forall t \geqslant t_2 \tag{4.30}$$

其中 K_2 依赖于始值,t_2 与始值及 R 有关($\| u_0 \| \leqslant R$).

下面我们应用定理 4.1 给出解的 Gevrey 类正则性估计.

为简单起见,我们设 $\Omega = (0, 2\pi)$,和

$$\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x = 0, \forall t > 0$$

引理 4.4　设 $u, v, w, y \in D(e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}A)$,$\tau > 0$,则对于 $R(u, v, w)$ 我们有

$$
\begin{aligned}
&|(R(u,v,w), Ay)_\tau| \\
&\leqslant \rho |w|_\tau |Ay|_\tau + c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^\sigma |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau^\sigma |A^{\frac{1}{2}}w|_\tau |Ay|_\tau \\
&\quad + c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau |A^{\frac{1}{2}}w|_\tau^{1/2} |Aw|_\tau^{1/2} |Ay|_\tau \\
&\quad + c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{1/2} |Au|_\tau^{1/2} |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau |A^{\frac{1}{2}}w|_\tau |Ay|_\tau \\
&\quad + c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau |A^{\frac{1}{2}}v|_\tau^{1/2} |Av|_\tau^{1/2} |A^{\frac{1}{2}}w|_\tau |Ay|_\tau
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

其中 c 是适当的常数.

证明 我们令

$$u=\sum_{j\in Z^2}u_j\mathrm{e}^{ijx},\ u^*=\mathrm{e}^{\tau A^{\frac{1}{2}}}u=\sum u_j^*\mathrm{e}^{ijx},\ u_j^*=\mathrm{e}^{\tau|j|}u_j \tag{4.32}$$

类似定义 v,w,y.然后我们有

$$\begin{aligned}(R(u,v,w),y)=&-\rho(w,y)+((u\cdot v)^{\sigma}D_1w,y)\\&-(\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w),y)\\&-\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla w)(u\cdot v)),y)\end{aligned}\tag{4.33}$$

我们逐项估计(4.33)

$$-\rho(w,y)=-4\pi^2\rho\sum_{l=s}w_l\cdot\bar{y}_s \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}((u\cdot v)^{\sigma}D_1w,y)=&\int_{\Omega}\Big(\sum u_{j1}\mathrm{e}^{ij_1x}\cdot\sum v_{k1}\mathrm{e}^{ik_1x}\Big)\\&\cdots\Big(\sum u_{j\sigma}\mathrm{e}^{ij_{\sigma}x}\cdot\sum v_{k\sigma}\mathrm{e}^{ik_{\sigma}x}\Big)\\&\cdot\Big(D_1\sum w_l\mathrm{e}^{ilx}\cdot\sum_{S}\bar{y}_s\mathrm{e}^{-isx}\Big)\mathrm{d}x\\=&4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_{\sigma}+k_{\sigma}+l=s}(u_{ji}v_{k_1})\cdots\\&(u_{j\sigma}\cdot v_{k\sigma})(D_1w_l\cdot\bar{y}_s)\end{aligned}\tag{4.35}$$

类似地有

$$\begin{aligned}&-(\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla w)(u\cdot v),y)\\=&-4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s)\end{aligned}\tag{4.36}$$

由于

$$\begin{aligned}-\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla((u\cdot v)w),y)=&-\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla w)(u\cdot v),y)\\&-\alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)v)w,y)\\&-\alpha(((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla v)u)w,y)\end{aligned}\tag{4.37}$$

类似地得到(4.37)的 Fourier 系数表式:

$$-\alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(u\cdot v)w),y)=-4\pi^2\alpha\Big[\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$+\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$+\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ik)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)\Big]\tag{4.38}$$

于是

$$(R(u,v,w),y)=-4\pi^2\rho\sum_{l=s}w_l\cdot\bar{y}_s+4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j1}\cdot v_{k1})\cdots$$
$$(u_{j_\sigma}\cdot v_{k_\sigma})(D_1w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ik)(u_j\cdot v_k)(w_l\cdot\bar{y}_s)$$
$$-4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j\cdot v_k)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)(w_l\cdot\bar{y}_s)\tag{4.39}$$

利用(4.39)和(4.32),有

$$(R(u,v,w),Ay)_\tau=(R(u,v,w),e^{2\tau A^{\frac{1}{2}}}Ay)$$
$$=-4\pi^2\rho\sum_{l=s}(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2$$
$$+4\pi^2\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(u_{j_1}^*\cdot v_{k_1}^*)\cdots(u_{j_\sigma}^*\cdot v_{k_\sigma}^*)$$
$$\times(D_1w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)|s|^2)\exp\{\tau(|s|-|j_1|$$
$$-|k_1|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|)\}$$
$$-4\pi^2\alpha\sum_{j+k+l=s}[(u_j^*\cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot il)(w_l^*\cdot\bar{y}_s)$$
$$+(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ij)(u_j^*\cdot v_k^*)(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)$$
$$+(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot ik)(u_j^*\cdot v_k^*)(w_l^*\cdot\bar{y}_s^*)]|s|^2$$

$$\times \exp\{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)\}$$
$$-4\pi^2\beta\sum_{j+k+l=s}(u_j^*\cdot v_k^*)(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot il)(w_l^*\cdot \bar{y}_s^*)|s|^2$$
$$\times \exp\{\tau(|s|-|j|-|k|-|l|)\} \tag{4.40}$$

注意$|s|-|j_1|-|k|-\cdots-|j_\sigma|-|k_\sigma|-|l|\leqslant 0$和$|s|-|j|-|k|-|l|\leqslant 0$,于是有

$$|(R(u,v,w),Ay)_\tau|\leqslant 4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||y_s^*||s|^2$$
$$+4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots$$
$$|u_{j_\sigma}^*||v_{j_\sigma}^*||w_l^*||y_s^*||s|^2)$$
$$+4\pi^2\alpha|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}[|u_j^*||v_k^*||l|$$
$$+|w_l^*||y_s^*|+|j||u_j^*||v_k^*||w_l^*||y_s^*|$$
$$+|u_j^*||k||v_k^*||w_l^*||y_s^*|]|s|^2$$
$$+4\pi^2\beta|\boldsymbol{\lambda}_2|\sum_{j+k+l=s}(|u_j^*||v_k^*||l|$$
$$\times|w_l^*||y_s^*||s|^2) \tag{4.41}$$

利用

$$4\pi^2\rho\sum_{l=s}|w_l^*||\bar{y}_s^*||s|^2$$
$$=\rho\int\sum_l|w_l^*|e^{ilx}\cdot\sum_s|\bar{y}_s^*|Ae^{-isx}dx$$
$$=\rho\int\sum_{l=s}|w_l^*|e^{ilx}\cdot A\Big(\sum_s|\bar{y}_s^*|e^{-isx}\Big)dx$$
$$\leqslant\rho|w|_\tau|Ay|_\tau \tag{4.42}$$

对于

$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(|u_{j_1}^*|v_{k_1}^*\cdots$$
$$|u_{j_\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\bar{y}_s^*||s|^2)$$

应用 Hölder 不等式及$|u|_p\leqslant c\|u\|$, $\forall 1<p<\infty$,类似(4.42),

我们有

$$4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}\sum_{j_1+k_1+\cdots+j_\sigma+k_\sigma+l=s}(|u_{j_1}^*||v_{k_1}^*|\cdots$$

$$|u_{j\sigma}^*||v_{k_\sigma}^*||w_l^*||\bar{y}_s^*||s|^2)$$

$$\leqslant\sqrt{1+\mu^2}|u_{j_1}^*|_{4\sigma+2}|v_{k_1}^*|_{4\sigma+2}\cdots$$

$$\times|u_{j\sigma}^*|_{4\sigma+2}|v_{k_\sigma}^*|_{4\sigma+2}|w_l^*|_{4\sigma+2}|Ay^*|$$

$$\leqslant c\sqrt{1+\mu_2}\|u\|_\tau^\sigma\|v\|_\tau^\sigma\|w\|_\tau|Ay|_\tau \qquad (4.43)$$

其中已记 $\|\cdot\|_{\tau}=|A^{\frac{1}{2}}e^{\tau A^{\frac{1}{2}}}|=|A^{\frac{1}{2}}|_\tau$.

利用上述技巧和 $|u|_{L4}\leqslant c|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}$,我们有

$$4\pi^2\alpha_1|\lambda_1|\sum_{j+k+l=s}|u_j^*||v_k^*||l||w_l^*||\bar{y}_s^*||s|^2$$

$$\leqslant\alpha_1|\lambda_1||u^*|_8|v^*|_8|A^{\frac{1}{2}}w^*|_4|Ay_s^*|$$

$$\leqslant c\|u\|_\tau\|v\|_\tau\|w\|_\tau^{1/2}|Aw|_\tau^{1/2}|Ay|_\tau \qquad (4.44)$$

类似地得到(4.41)的其余各式,综合这些结果就推得(4.31).

由引理4.4,我们有

$$|(R(u,u,u),Au)_\tau|\leqslant\rho|u|_\tau|Au|_\tau+c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{2\sigma+1}|Au|_\tau$$

$$+c|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{5/2}|Au|_\tau^{3/2}$$

$$\leqslant\varepsilon|Au|_\tau^2+c_1(\varepsilon)|u|_\tau^2$$

$$+c_2(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{4\sigma+2}+c_3(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{10}$$

$$\leqslant\varepsilon|Au|_\tau^2+c_4(\varepsilon)|A^{\frac{1}{2}}u|_\tau^{4\sigma+2}+c_6$$

$$(\because\sigma>2) \qquad (4.45)$$

(4.45)满足条件(4.8),故当 $u_0\in H^2(\Omega)$ 时(4.21),(4.22)的解 $u(t)$ 是Gevrey类 $D(A^{\frac{1}{2}}\exp(kA^{\frac{1}{2}}))$ 类元素且可解析延拓到区域:

$$\Delta=\{t+se^{i\theta},t\geqslant t_*,|\theta|\leqslant\theta_0,0\leqslant s\leqslant T_0\}$$

同时有

$$\| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} u(z) \| \leqslant K, z \in \Delta$$

$$\| e^{kA^{\frac{1}{2}}} A^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} u(t) \| \leqslant K_1, t \geqslant t_1 \tag{4.46}$$

有了以上准备,我们可以构造近似惯性流形.类似§3.我们将方程投影到 $P_N H, Q_N H$,有

$$\frac{dp}{dt} + DAp + P_N R(p+q, p+q, p+q) = 0 \tag{4.47}$$

$$\frac{dq}{dt} + DAq + Q_N R(p+q, p+q, p+q) = 0 \tag{4.48}$$

利用(4.46)有

$$|A^{\frac{1}{2}} q(t)| \leqslant K e^{-k\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}}, \quad |q(t)| \leqslant K\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left| \frac{d}{dt} q(t) \right| \leqslant K_1 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} e^{-k\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}} \tag{4.49}$$

我们定义映射 $\phi: P_N H \rightarrow Q_N H$:使得 $\Psi = \phi(p)$满足

$$DA\Psi + Q_N R(p, p, p) = 0 \tag{4.50}$$

令 $\Sigma = \text{graph}(\phi)$,我们证明 Σ 是一个指数逼近型近似惯性流形.

定理 4.5 设(4.25)成立,且 $u_0 \in H^2(\Omega)$,则存在仅与始值及方程参数有关的 E,使得(4.21),(4.22)的任何解 $u(t)$在 H 空间与Σ 间距离为$E\lambda_{N+1}^{-1} e^{-k\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}}$所界,只要 $t \geqslant t_*$.其中 t_*仅与方程参数及 $R(\|u_0\| \leqslant R)$有关.

证明

$$D(A\Psi - Aq) = \frac{dq}{dt} + Q_N R(u) - Q_N R(p)$$

我们注意

$$\begin{aligned} R(u) - R(p) = & -\rho q + D_1 |u|^{2\sigma} u - D_1 |p|^{2\sigma} p \\ & - \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) \\ & + \alpha \boldsymbol{\lambda}_1 \cdot \nabla(|p|^2 p) - \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla u)|u|^2 \\ & + \beta(\boldsymbol{\lambda}_2 \cdot \nabla p)|p|^2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

我们估计(4.51)中每一项：

$$
\begin{aligned}
|D_1|u|^{2\sigma}u - D_1|p|^{2\sigma}p| &\leqslant |D_1(|u|^{2\sigma} - |p|^{2\sigma})u| \\
&\quad + |D_1|p|^{2\sigma}(u-p)| \\
&\leqslant \sqrt{1+\mu^2}[|u|_\infty||u|^{2\sigma} - |p|^{2\sigma}| \\
&\quad + |p|_\infty^{2\sigma}|q|] \\
&\leqslant \sqrt{1+\mu^2}[|u|_\infty|q||f'(\zeta)|_\infty \\
&\quad + |p|_\infty^{2\sigma}|q|]
\end{aligned}
$$

其中 $f(s)=s^{2\sigma}$，ζ 在 $|u|$ 和 $|p|$ 之间，利用(4.29)和

$$|u|_\infty \leqslant c|u|^{1/2}(|Au|+|u|)^{1/2} \leqslant C_1, t \geqslant t_*$$

我们得到

$$|D_1|u|^{2\sigma}u - D_1|p|^{2\sigma}p| \leqslant c|q| \tag{4.52}$$

类似地处理

$$|\beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla u)|u|^2 - \beta(\boldsymbol{\lambda}_2\cdot\nabla p)|p|^2| \leqslant c|q| + c|A^{\frac{1}{2}}q| \tag{4.53}$$

由于

$$\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u) = \alpha(\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)|u|^2 + 2\alpha((\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla u)u)u$$

完全类似于(4.53)，有

$$|\alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|u|^2u) - \alpha\boldsymbol{\lambda}_1\cdot\nabla(|p|^2p)| \leqslant c|q| + c|A^{\frac{1}{2}}q| \tag{4.54}$$

从而

$$|R(u) - R(p)| \leqslant c|q| + c|A^{\frac{1}{2}}q| \tag{4.55}$$

于是利用(4.49)，

$$|D(A\psi - Aq)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right| + |R(u) - R(p)| \leqslant c\mathrm{e}^{-k\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}}, \forall t \geqslant t_*$$

但是

$$
\begin{aligned}
|D(A\psi - Aq)| &= \sqrt{1+\nu^2}|A\psi - Aq| \\
&\geqslant \sqrt{1+\nu^2}\lambda_{N+1}|\psi - q|
\end{aligned}
$$

于是

$$|\psi - q| \leqslant c\lambda_{N+1}^{-1} e^{-k\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall t \geqslant t_* \tag{4.56}$$

§5 非自共轭情形弱耗散方程的 AIM

前面各节我们研究了如下耗散方程的 AIM:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + R(u) = 0 \tag{5.1}$$

其中 A 是 H 空间自共轭算子且有逆紧算子,然而,许多耗散方程,例如弱耗散 KdV 方程,A 非自共轭且是弱耗散的、本节基于 §1 的思路,给出这类方程 AIM 的一种构造方法.

我们研究:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{xxx} + \gamma u + uu_x = f(x), \gamma > 0, t > 0 \tag{5.2}$$

其中 $A = \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}, R(u) = uu_x + \gamma u - f(x)$.

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{5.3}$$

$$u(x,t) = u(x+l,t), x \in R, t > 0, l > 0 \tag{5.4}$$

记 $A_0 = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, H_l^m (m=0,1,2)$是 R 上 l 周期三角多项式函数集的闭包,相应范数记为

$$\| u \|_m = \left(\sum_{k=0}^{m} l^{2k} |u|_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |u|_k^2 = \int_0^l \left| \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} \right|^2 \mathrm{d}x \tag{5.5}$$

H_l^m 上内积记为$(\,,\,)_m, (\,,\,)_0 = (\,,\,)$; A_0 在 $H = l^2(0,l)$上特征函数记为$\{w_j\}_1^\infty$,相应特征值 $\lambda_j = \left(\dfrac{2\pi j}{l}\right)^2$,

下面的结果是已知的:

定理 5.1 对于问题(5.2)~(5.4),如下结论成立:

若 $f \in H_l^1, u_0 \in H_l^1$,则存在唯一解 $u(t)$:

$$u \in C(R_+; H_l^1) \cap L^\infty(R_+, H_l^1)$$

而且当$\| u_0 \|_1 \leqslant R$时，存在$T(R)>0$，当$t \geqslant T(R)$时，

$$\| u \|_1 \leqslant \rho_1 \tag{5.6}$$

若$f \in H_l^2$，$u_0 \in H_l^2$，则存在唯一解$u(t)$.

$$u \in C(R_+, H_l^2) \cap L^\infty(R_+, H_l^2)$$

而且当$\| u_0 \|_2 \leqslant R$时，存在$T_1(R)>0$，当$t \geqslant T_1(R)$时，

$$\| u \|_2 \leqslant \rho_2 \tag{5.7}$$

其中ρ_1, ρ_2是仅与l, γ, f有关的常数.

利用定理5.1和P_N与A_0可换性，有

$$\| u \|_2^2 = \| P_N u \|_2^2 + \| Q_N u \|_2^2 \geqslant \| Q_N u \|_2^2$$

从而

$$\| q \|_2^2 \leqslant \rho_2^2 \tag{5.8}$$

又利用

$$\begin{aligned}\| q \|_2^2 &\geqslant | q |_0^2 + l^2 | q |_1^2 + l^4 \lambda_{N+1} | q |_1^2 \\ &\geqslant | q |_0^2 + l^2 | q |_1^2 + \frac{l^4}{2} \lambda_{N+1} | q |_1^2 + \frac{l^4}{2} \lambda_{N+1}^2 | q |_0^2 \\ &\geqslant \left(1 + \frac{l^2}{2} \lambda_{N+1}\right) \| q \|_1^2\end{aligned}$$

从而有

$$\| q \|_1 \leqslant \left(1 + \frac{l^2}{2} \lambda_{N+1}\right)^{-1/2} \rho_2 \leqslant \sqrt{2} \rho_2 l^{-1} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$

这就得到

命题5.2 设$u_0 \in H_l^2$，$f \in H_l^2$，则对于平凡AIM H_N只要$t \geqslant \max\{T(R), T_1(R)\}$，则有

$$\operatorname{dist}_{H_l^1}(H_N, u(t)) \leqslant \sqrt{2} l^{-1} \rho_2 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} \tag{5.9}$$

下面我们在H_N上构造AIM：

在$Q_N H_l^1$中考虑关于q_1的线性偏微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial t} + q_{1xxx} + \gamma q_1 + Q_N(p q_1)_x = Q_N(f - p p_x), t > T \\ q_1(T) = 0 \\ q_1(x + l, t) = q_1(x, t) \quad x \in R, t > T \end{cases} \tag{5.10}$$

定理 5.3　设 $f\in H_l^2$,问题(5.10)存在唯一解 $q_1(p)$,使得只要 N 满足:

$$N\geqslant \max\left\{8\rho_2^2 l^{-3}\gamma^{-2},\rho_2^{\frac{1}{2}}l^{\frac{3}{4}},\gamma^{-1}l\left[\rho_1 l^{-3}+|f|_0+\gamma\rho_1+\sqrt{2}\rho_1^2 l^{-\frac{3}{2}}\right]\right\} \tag{5.11}$$

就有

$$q_1\in L^\infty([T,\infty),Q_N H_l^1)\cap C([T,\infty),Q_N H_l^1)$$

证明　设 $M>N$,记 $P_N^M=P_M Q_N$, $P_N^M q_1=q^M$, $P_N^M f=f^M$,在由 $\{w_j\}_N^\infty$ 张成的 $Q_N H_l^1$ 空间中研究:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q^M}{\mathrm{d}t}+q_{xxx}^M+\gamma q^M+P_N^M(pq^M)_x=f^M-P_N^M(pp_x) \\ q^M(T)=0 \qquad\qquad t>T\end{cases} \tag{5.12}$$

又记 $f_1^M=f^M-P_N^M(pp_x)$;用 $q_{xx}^M+P_N^M(pq^M)$乘方程(5.12)两边且在$(0,l)$上积分,得到

$$\int\frac{\mathrm{d}q^M}{\mathrm{d}t}P_N^M(pq^M)\mathrm{d}x+\gamma\int q^M P_N^M(pq^M)\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}q^M}{\mathrm{d}t}q_{xx}^M\mathrm{d}x-\gamma\int(q_x^M)^2\mathrm{d}x$$
$$=\int f_1^M(P_N^M(p\,q^M)+q_{xx}^M)\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

利用空间正交性及 $A_0^{\frac{1}{2}}$ 与 P_N^M 可换性,我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}q^M}{\mathrm{d}t}P_N^M(pq^M)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int p(q^M)^2 dx-\frac{1}{2}\int p'(q^M)^2\mathrm{d}x$$

$$\gamma\int q^M P_N^M(pq^M)\mathrm{d}x=\gamma\int p(q^M)^2\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}q^M}{\mathrm{d}t}q_{xx}^M\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(q_x^M)^2\mathrm{d}x$$

从而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int[(q_x^M)^2-p(q^M)^2]\mathrm{d}x+\gamma\int[(q_x^M)^2-p(q^M)^2]\mathrm{d}x$$
$$=-\int f_1^M pq^M\mathrm{d}x+\int f_{1x}^M q_x^M\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int p'(q^M)^2\mathrm{d}x \tag{5.14}$$

用 q^M 乘(5.12)的两边并在$(0,l)$上积分,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(q^M)^2\mathrm{d}x+\gamma\int(q^M)^2\mathrm{d}x=\int f_1^M g^M\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int p_x(q^M)^2\mathrm{d}x \tag{5.15}$$

用 l^2 乘(5.14)并与(5.15)相加,并记 $\varphi(v)=\int[l^2v_x^2-l^2pv^2+v^2]\mathrm{d}x$ 则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(q^M)+\gamma\varphi(q^M)=r(t) \tag{5.16}$$

其中

$$r(t)=-\int\Big[l^2f_1^Mpq^M-l^2f_{1x}^Mq_x^M+\frac{1}{2}l^2p'(q^M)^2 \\ -f_1^Mq^M+\frac{1}{2}p_x(q^M)^2\Big]\mathrm{d}x \tag{5.17}$$

由定理 5.1, $\|p\|_1\leqslant\rho_1$, $\|p\|_2\leqslant\rho_2$ 和

$$|p|_{L^\infty}\leqslant|p|_0^{\frac{1}{2}}[2|p|_1+l^{-1}|p|_0]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}l^{-\frac{1}{2}}\rho_1$$

类似有

$$|pp_x|_0\leqslant\sqrt{2}l^{-3/2}\rho_1^2,\quad |pp_x|_1\leqslant l^{-\frac{5}{2}}(\sqrt{2}\rho_1\rho_2+\rho_1^{3/4}\rho_2^{5/4})$$

易见 $\varphi(q^M)$是 q^M 在$P_N^MH_l^1$ 中的等价范,且当

$$\lambda_{N+1}\geqslant2\sqrt{2}\rho_2l^{-\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

有

$$\frac{1}{2}\|q^M\|_1^2\leqslant\varphi(q^M)\leqslant(1+\sqrt{2}\rho_2l^{3/2})\|q^M\|_1^2 \tag{5.19}$$

下面逐项估计(5.17):

$$\int f_1^Mpq^M\mathrm{d}x\leqslant|p|_\infty|f_1^M||q^M|$$

$$\leqslant\sqrt{2}\rho_1l^{-\frac{1}{2}}[|f|_0+|pp_x|_0]\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}|q^M|_1$$

$$\leqslant\frac{\lambda_{N+1}^{-1}}{4l^4}\|q^M\|_1^2+2l\rho_1^2[|f|_0+\sqrt{2}\rho_1^2l^{-\frac{3}{2}}]^2$$

$$\int q_x^Mf_{1x}^M\mathrm{d}x\leqslant\frac{\gamma l^{-2}}{4}\|q^M\|_1^2+l^2\gamma^{-1}\Big[|f|_1^2+l^{-5}\big(\sqrt{2}\rho_1\rho_2+\rho_1^{\frac{3}{4}}\rho_2^{\frac{5}{4}}\big)^2\Big]$$

$$\int f_1^Mq^M\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4l^2}\lambda_{N+1}^{-1}\|q^M\|_1^2+[|f|_0+\sqrt{2}\rho_1^2l^{-\frac{3}{2}}]^2$$

$$\frac{1}{2}\int p_x(q^M)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\rho_1l^{-3}\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{4}}\|q^M\|_1^2$$

将 $p' = P_N f - p_{xxx} - \gamma p - P_N(uu_x)$ 代入$\int p'(q^M)^2 \mathrm{d}x$，且利用

$$|q^M q_x^M|_0 \leqslant \sqrt{3} l^{-2} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} \| q^M \|_1^2$$

$$|q^M|_{L^4}^2 \leqslant |q^M|_0^{3/2} |q^M|_1^{1/2} \leqslant l^{-2} \lambda_{N+1}^{-3/4} \| q^M \|_1^2$$

有

$$\int p'(q^M)^2 \mathrm{d}x \leqslant \Big[l^{-2} \lambda_{N+1}^{-3/4} |f|_0 + 2\sqrt{3} \rho_2 l^{-4} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} + l^{-2} \gamma \rho_1 \lambda_{N+1}^{-3/4} + \sqrt{2} l^{-7/2} \rho_1^2 \lambda_{N+1}^{-3/4} \Big] \| q^M \|_1^2$$

从而当

$$\frac{1}{2}[\rho_1 l^{-3} + |f|_0 + \gamma\rho_1 + \sqrt{2} l^{-3/2} \rho_1^2] \lambda_{N+1}^{-3/4} + \sqrt{3} l^{-2} \rho_2 \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} l^{-2} \lambda_{N+1}^{-1} \leqslant \frac{\gamma}{4} \tag{5.20}$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi(q^M) + \frac{\gamma}{2} \varphi(q^M) \leqslant \rho_3 \tag{5.21}$$

其中

$$\rho_3 = 4 l^3 \rho_1^2 [|f|_0 + \sqrt{2} l^{-3/2} \rho_1^2]^2 + \gamma^{-1} l^4 \Big[|f|_1^2 + l^{-5} \big(\sqrt{2} \rho_1 \rho_2 + \rho_1^{3/4} \rho_2^{5/4}\big)^2 \Big] + [|f|_0 + \sqrt{2} l^{-3/2} \rho_1]^2$$

注意 $q^M(T) = 0$，有

$$\varphi(q^M) \leqslant 2\gamma^{-1} \rho_3, \quad \forall t \geqslant T \tag{5.22}$$

即

$$\| q^M \|_1^2 \leqslant 4 \gamma^{-1} \rho_3$$

这表明 $q^M \in L^\infty([T,\infty) P_N^M H_l^1)$且一致有界.

由于(5.12)关于 q^M 是线性偏微分方程，可利用通常方法得到唯一性，再由通常 Galerkin 方法得到当 N 满足(5.20)时，(5.12)存在唯一解

$$q_1 \in L^\infty([T,\infty), Q_N H_l^1)$$

利用

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| q_1 \|_1^2 = \int (q_{1t} + q_{1xxx})(q_1 - l^2 q_{1xx})\mathrm{d}x \quad (5.23)$$

由(5.12)有 $q_{1t} + q_{1xxx} \in L^\infty([T,\infty), Q_N H_l^1)$，而 $q_1 - L^2 q_{1xx} \in L^\infty([T,\infty), Q_N H_l^{-1})$，从而(5.23)一致有界 M_1，于是

$$\big| \| q_1(t_1) \|_1^2 - \| q_1(t_2) \|_1^2 \big| \leqslant | t_1 - t_2 | M_1$$

这表明 $q_1(t)$在 $Q_N H_l^1$ 中关于 t 连续.

(5.18)，(5.20)成立的一个充分条件正是(5.11).

定理 5.4 在定理 5.3 同样条件下，对任何 $t \in [T,\infty)$，$q_1(p)$在 $Q_N H_l^1$ 空间关于 p 在 $P_N H_l^1$ 中范是弱 Lipschitz 连续的.

证明 设 $q_j(p_j)$是如下方程的两个解：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t} + q_{jxxx} + \gamma q_j + Q_N(p_j p_{jx} + (p_j q_j)_x) + Q_N f \\ q_j(T) = 0 \qquad j = 1,2 \end{cases} \quad (5.24)$$

记 $\Delta = q_1 - q_2, \Delta_p = p_1 - p_2, \Delta_{p_x} = p_{1x} - p_{2x}$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + \Delta_{xxx} + \gamma\Delta + Q_N[\Delta_p p_{1x} + p_2 \Delta_{p_x} + (\Delta_p q_1 + p_2\Delta)_x] = 0 \\ \Delta(T) = 0 \end{cases} \quad (5.25)$$

用 Δ 乘(5.24)且在$(0,l)$上积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \Delta^2 \mathrm{d}x + 2\gamma \int \Delta^2 \mathrm{d}x + 2\int \Delta(\Delta_p p_{1x} + p_2 \Delta p_x)\mathrm{d}x + 2\int \Delta(\Delta_p q_1 + p_2\Delta)_x \mathrm{d}x = 0 \quad (5.26)$$

有如下估计：

$$\begin{aligned} \int \Delta(\Delta_p p_{1x} + p_2 \Delta_{p_x})\mathrm{d}x &\leqslant | p_{1x} |_{L_\infty} | \Delta |_0 | \Delta_p |_0 + | p_2 |_{L^\infty} | \Delta_{p_x} |_0 | \Delta |_0 \\ &\leqslant \frac{\gamma}{3} | \Delta |_0^2 + c(| \Delta_p |_0^2 + | \Delta_{p_x} |_0^2) \end{aligned}$$

类似有

$$\int \Delta(\Delta_p q_1)_x \mathrm{d}x \leqslant \frac{\gamma}{3}|\Delta|_0^2 + c_1(|\Delta_p|_0^2 + |\Delta_{p_x}|_0^2)$$

$$\int \Delta(p_2 \Delta)_x \mathrm{d}x \leqslant \frac{l^{\frac{1}{2}}}{2}\rho_2 |\Delta|_0^2$$

综合上述各式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta|_0^2 + \gamma_0|\Delta|_0^2 \leqslant c_3(|\Delta_p|_0^2 + |\Delta_{p_x}|_0^2) \qquad (5.27)$$

其中 $\gamma_0 = \frac{2\gamma}{3} - \frac{l^{\frac{1}{2}}}{2}\rho_2$. 于是

$$|\Delta(t)|_0^2 \leqslant c_3 \gamma_0^{-1}(|\Delta_p|_0^2 + |\Delta_{p_x}|_0^2)(1 - \mathrm{e}^{\gamma_0(t-T)}) \qquad (5.28)$$

这表明 $q_1(p)$在 H_l^0 中关于p 在$P_N H_l^1$ 中范数是 Lipschitz 连续的. 注意到 $p \in H_l^2$ 且是一致有界集,而$|p|_{L^\infty} \leqslant c\rho_1$, $q_1(p) \in Q_N H_l^1$ 且一致有界,$H_l^1 \subset H_l^0$,嵌入是紧的,从而 $q_1(p)$在 H_l^1 中关于p 是弱 Lipschitz 连续的.

记 $M_1 = \text{grapb } q_1(p)$,则 M_1 是 H_l^1 空间关于p 的弱 Lipschitz 连续流形,从(5.28)可见,M_1 由 p 唯一确定.

下面给出 M_1 与(5.2)~(5.3)解的距离估计.

定理5.5 在定理 5.3 同样条件下,对于(5.2)~(5.3)的任何解 $u(t)$,只要 t 充分大和N 满足(5.30),有

$$\mathrm{dist}_{H_l^1}(M_1, u(t)) \leqslant c\lambda_{N+1}^{-3/4} \qquad (5.29)$$

$$N \geqslant \max\{128\gamma^{-2}l^{-3}\rho_2^2, l^{3/4}\rho_2^{1/2}, \quad \gamma^{-1}l[|f|_0 + \sqrt{2}l^{-3/2}\rho_1^2 + \gamma\rho_1 + l^{-2}\rho_2 + l^{-3}\rho_1]\} \qquad (5.30)$$

证明 记 $\Delta = q_1(p) - q(t)$,其中 $q(t) = Q_N u(t)$,有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + \Delta_{xxx} + \gamma\Delta + Q_N(p\Delta_x + p_x\Delta - qq_x) = 0 \quad (5.31)$$

用 $2\Delta_{xx} + 2p\Delta$ 乘以(5.31)且在$(0,l)$上积分得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\Delta_x^2 - p\Delta^2)\mathrm{d}x + 2\gamma\int(\Delta_x^2 - p\Delta^2)\mathrm{d}x + 2\int \Delta_{xx}qq_x \mathrm{d}x + \int \Delta^2 p' \mathrm{d}x + 2\int p\Delta qq_x \mathrm{d}x = 0 \quad (5.32)$$

用 2Δ 乘以(5.31)在 $(0,l)$ 上积分和用 l^2 乘(5.32)后相加,记 $\varphi(\Delta)=\int(l^2\Delta_x^2-l^2p\Delta^2+\Delta^2)\mathrm{d}x$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\Delta)+2\gamma\varphi(\Delta)=\gamma_1(t) \tag{5.33}$$

其中

$$r_1(t)=-2\int(l^2\Delta_{xx}qq_x+l^2p\Delta qq_x+l^2p'\Delta^2)\mathrm{d}x$$
$$+2\int\Delta(p\Delta_x+p_x\Delta-qq_x)\mathrm{d}x \tag{5.34}$$

逐项估计(5.34),注意 $q\in H_l^2$, $|q_{xx}|_0\leqslant l^{-2}\rho_2$,

$$\int\Delta_{xx}qq_x\mathrm{d}x=-\int\Delta_xq_x^2\mathrm{d}x-\int\Delta_xqq_{xx}\mathrm{d}x$$

于是

$$2l^2\int\Delta_{xx}qq_x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\gamma}{4}|\Delta_x|_0^2+\rho_4\lambda_{N+1}^{-3/2}$$

其中 $\rho_4=32\gamma^{-1}l^2\rho_2^4$,类似估计其他各项,最后得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\Delta)+\frac{\gamma}{2}\varphi(\Delta)\leqslant\rho_5|\Delta_x|_0^2+\rho_6\lambda_{N+1}^{-\frac{3}{2}} \tag{5.35}$$

其中

$$\rho_5=2\sqrt{3}\rho_2\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}}+l^2(|f|_0+l^{-2}\rho_2+\gamma\rho_1+\sqrt{2}l^{-3/2}\rho_1^2)\lambda_{N+1}^{-3/4} \tag{5.36}$$

$$\rho_6=\gamma^{-1}[32l^2\rho_2^4+24l^{-1}\rho_1^6+l^{-4}\rho_1^4] \tag{5.37}$$

当 N 满足(5.30)时,有

$$\rho_5<\frac{\gamma l^2}{8}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\Delta)+\frac{\gamma}{4}\varphi(\Delta)\leqslant\rho_6\lambda_{N+1}^{-3/2}$$

于是

$$\varphi(\Delta)\leqslant\varphi(\Delta(T))\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{4}(t-T)}+4\rho_6\gamma^{-1}\lambda_{N+1}^{-3/2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{4}(t-T)}) \tag{5.38}$$

注意

$$\varphi(\Delta(T)) \leqslant \left(1+\sqrt{2}\rho_2 l^{3/2}\right) \| q_1(T) - q(T) \|_1^2$$
$$= \left(1+\sqrt{2}\rho_2 l^{3/2}\right) \| q(T) \|_1^2$$
$$\leqslant 4\left(1+\sqrt{2}\rho_2 l^{3/2}\right)\rho_1^2$$

取 t 充分大,就有

$$\varphi(\Delta) \leqslant 8\gamma^{-1}\rho_6\lambda_{N+1}^{-3/2}$$

于是 $\| q_1(p) - q(t) \|_1^2 \leqslant 2\varphi(\Delta) \leqslant 16\gamma^{-1}\rho_6\lambda_{N+1}^{-3/2}$,证毕.

§6 非自治系统 AIM 的构造

对于非自治系统,当方程右端函数是时间 t 的周期函数或概周期函数或拟周期函数时,基于所谓时间算符的分析,V. V. Chepyzhov 和 M. I. Vishik 深入研究了描述非自治系统的双参数族算子,引入一组参数将非自治系统化为半群作用于过程和半群复合体导出一致吸引子.本节我们研究非自治系统 AIM 的构造方法,不涉及吸引子是否存在.主要技巧采用时间 t 的小扰动.

我们研究非自治 NS 方程,主要记号和估计均采用本章第 3、4 节的相应记号和有关结果.

我们研究二维 Navier-stokes 方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + B(u,u) = f(x,t) \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{6.2}$$

齐次 Dirichlet 边值条件或周期边值条件.假设 f 满足 $f \in L^\infty((0,\infty);H)$,即 $\sup_{t\geqslant 0}|f(t)| < f_\infty$.

下面的结果是已知的:

存在常数 M_0, M_1, M_2 使得对(6.1)的每一个解 $u(t)$,存在仅与 $u_0, \nu, f_\infty, \lambda_1$ 有关的 T_*,使得当 $t \geqslant T_*$ 时,有

$$|u(t)| \leqslant M_0,\ \| u(t) \| \leqslant M_1,\ |Au(t)| \leqslant M_2 \tag{6.3}$$

而对于 $B(u,u)$,§3 中给出的估计成立,此外还有

$$|B(u,v),w| \leqslant c_3 \|u\| \|v\| |w| \left[1+\log\left(\frac{\|w\|}{\lambda_1^{1/2}|w|}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$u,v,w \in V \qquad (6.4)$$

和

$$|B(u,v),w| \leqslant c_4 |u| \|v\| \|w\| \left[1+\log\left(\frac{\|u\|}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}|u|}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$u,v,u \in V \qquad (6.5)$$

对于 $p(t),q(t)$满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \nu Ap + P_N B(p+q,p+q) = P_N f \qquad (6.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \nu Aq + Q_N B(p+q,p+q) = Q_N f \qquad (6.7)$$

利用§4结果，如果 $f \in D(\mathrm{e}^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}), \sigma > 0$，则(6.1)关于时间复值化方程的解 $u(t)$ 解析，且取值于 $D(A^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\sigma A^{\frac{1}{2}}})$，解析区域 $\{\mathrm{Re}\ z > K_2, \mathrm{Im}\ z \leqslant \sqrt{2}/2K_2\}$ 与 $u(t)$无关，利用 Cauchy 积分公式得到 $\left|\mathrm{e}^{\sigma A^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right| \leqslant K_3/\lambda_{N+1}$，于是我们可以如同§3那样构造 AIM：

$$\Phi_1(p) = Q_N(\nu A)^{-1}(f - B(p,p))$$

且令 $M_1 = \mathrm{graph}(\Phi_1)$，容易得到

$$\mathrm{dist}_V(u(t),M_1) \leqslant K_4 \lambda_{N+1}^{-1} \mathrm{e}^{-\sigma_2 \lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.8)$$

其中 $\sigma_2 > 0$.

然而，如果 $f = f(x,t)$，则 $\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|$ 却不再与 λ_{N+1}^{-1}同阶，它可以变得很大，从而在构造 AIM 时，不能再舍去. 事实上，我们令 $u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2^j t\right)\varphi_j$，其中 $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ 为 A 的特征向量构成的 H 空间的基；$\{\alpha_j\}$ 的选取使得 $\sum \alpha_j^2 2^{2j} < \infty$；由于对二维空间 λ_j 满足如下估计：$c_0 j \leqslant \lambda_j \leqslant c_1 j$，这就推得对所有 $\sigma_1 > 0$，

$$|e^{\sigma_1 A^{\frac{1}{2}}}u(t)|^2 \leqslant \sum e^{2\sigma_1 \lambda_j^{1/2}} \alpha_j^2 < \infty \tag{6.9}$$

因此 $u(t)$是 Gevrey 类函数. 令 $f(t)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\nu Au+B(u,u)$,则 $u(t)$是(6.1)的一个解,且可以验证,至少有 $f\in L^{\infty}(0,\infty;H)$,然而对于 $t=2\pi l$,l 为整数,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum_{N+1}^{\infty}2^{2j}\alpha_j^2 \tag{6.10}$$

而

$$|Aq|^2 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_j^2\alpha_j^2$$

这表明$\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|\gg|Aq|$,类似可得$\left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|\gg|B(u,u)|$. 因此,我们不能再用§3 中的方法构造 AIM.

我们采用如下方法,首先利用§3 方法构造 AIM $M(t)$,再将 t 按一定标准划分为小区间(t_n,t_{n+1})对每个区间端点再构造 AIM M_n(这时与 t 无关),然后分别估计当 $t\in(t_n,t_{n+1})$时 $q(t)$ 与 M_n 及M_n 与$M(t)$间的距离,就可得到 $M(t)$对解 $u(t)$的逼近估计.

记

$$B = \{p\in P_NH;\ \|p\|\leqslant 2M_1\}$$
$$B^{\perp} = \{q\in Q_NV;\ \|q\|\leqslant 2M_1\}$$

设

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant l_1|t_1-t_2|^{\theta} \tag{6.11}$$

容易证明 $p(t)$是一致 Lipschitz 连续的,即

$$|p(t_1)-p(t_2)|\leqslant l_2|t_1-t_2| \tag{6.12}$$

在§3 我们曾证明,只要 N 适当大,存在映射 $\phi^s:B\rightarrow Q_NV$,使得

$$A\phi^s(p)+Q_NB(p+\phi^s(p),p+\phi^s(p)) = Q_Nf \tag{6.13}$$

由于 $f(t)$的一致有界性(关于 t),因此当 $f=f(t)$时对任何 $p\in B$,对(6.13)也仍然存在映射 $\phi^s(p,Q_Nf(t))$,若 f 与 t 无关,我们

记为 $\phi^s(p,Q_Nf)$;容易得到:

引理 6.1 令 N 充分大使得

$$\lambda_{N+1}\geqslant\max\left\{4r_2^2,\frac{r_1^2}{4M_1^2}\right\}\tag{6.14}$$

则存在唯一映射 $\phi^s:B\to Q_NV$ 满足(6.13),而且

$$\|\phi^s(p,Q_Nf)\|\leqslant r_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}\tag{6.15}$$

其中

$$r_1=\nu^{-1}c_9 8M_1^2L_N^{1/2}+\nu^{-1}c_2 8M_1^2+\nu^{-1}|f|\lambda_{N+1}^{-1/2}$$

$$r_2=\nu^{-1}c_9 2M_1L_N^{1/2}+\nu^{-1}c_2 6M_1$$

$$L_N=\left(1+\log\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)\right)$$

假设 N 满足(6.14),而且满足

$$\lambda_{N+1}\geqslant\max\left\{\left(\frac{4c_{10}(M_1+r_1)}{\nu}\right)^2,\left(\frac{16c_2M_1}{\nu}\right)^4\right\}\tag{6.16}$$

则从(6.13)出发且利用(6.16)我们有

推论6.2 如下估计成立:

$$|A\phi^s(p,Q_Nf)|\leqslant\alpha_1+2\nu^{-1}|Q_Nf|,\ \forall p\in B\tag{6.17}$$

其中

$$\alpha_1=8c_9\nu^{-1}M_1^2\lambda_1^{-1}L_N^{1/2}+4c_9\nu^{-1}M_1\lambda_1^{-1/2}r_1L_N^{1/2}\lambda_{N+1}^{-1/2}$$

引理 6.3 对所有 $p_i\in B,f_i\in H,|f_i|\leqslant f_\infty,i=1,2$,我们有

$$\|\phi^s(p_1,Q_Nf_1)-\phi^s(p_2,Q_Nf_2)\|$$
$$\leqslant\alpha_2|p_1-p_2|+\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-1/2}|Q_Nf_1-Q_Nf_2|\tag{6.18}$$

其中 $\alpha_2=\nu^{-1}(8c_3M_1L_N^{1/2}+8c_4M_1L_N^{1/2})$.

证明 令 $\Delta p=p_1-p_2,q_i=\phi^s(p_i,Q_Nf_i),\Delta q=q_1-q_2,\Delta f=f_1-f_2$,则有

$$\begin{aligned}A\Delta q=&Q_N\Delta f-Q_N(B(p_1+q_1,\Delta p)+B(p_1+q_1,\Delta q)\\&+B(\Delta p,p_2+q_2)+B(\Delta q,p_2+q_2))\end{aligned}\tag{6.19}$$

(6.19)与 Δq 取内积,利用(6.4),(6.5)及§3有关不等式得到

$$\nu\|\Delta q\|^2\leqslant 4c_3M_1L_N^{1/2}|\Delta p|\,\|\Delta q\|+4c_2M_1\lambda_{N+1}^{-1/4}\|\Delta q\|^2+4c_4M_1L_N^{1/2}|\Delta p|\,\|\Delta q\|+4c_2M_1\lambda_{N+1}^{-1/2}\|\Delta q\|^2+\lambda_{N+1}^{-1/2}|Q_N\Delta f|\,\|\Delta q\|$$

再利用(6.16)得到

$$\|\Delta q\|\leqslant\nu^{-1}(8c_3M_1L_N^{1/2}+8c_4M_1L_N^{1/2})|\Delta p|+2\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-1/2}|Q_N\Delta f|$$

为避免直接对$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$估计,我们将证明如下方程的解指数衰减到平衡解 $\phi^s(p,Q_Nf)$.

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\nu A\omega+Q_NB(p+\omega,p+\omega)=Q_Nf$$

$$\omega(0)=q_0 \tag{6.20}$$

其中 $p\in B$ 固定;$q_0\in B^{\perp}$.

容易证明(6.20)的解存在且对所有 $t\geqslant 0$ 有 $\|p+\omega(t)\|\leqslant M_3$,此外有

引理 6.4 如果 N 满足(6.14),(6.16)和(6.21),$p\in B$,$|f|\leqslant f_\infty$,$q_0\in B^{\perp}$,则若 $\omega(t)$是(6.20)的解,对所有 $t\geqslant 0$,估计(6.22)成立.

$$\lambda_{N+1}\geqslant\max\left\{\left(\frac{2c_1M_1\lambda_1^{-\frac14}+4c_{10}M_1L_N^{\frac12}+2c_1r_1^{\frac12}(\alpha_1+2\nu^{-1}f_\infty)^{\frac12}}{\nu}\right)^4,\left(\frac{8c_1M_1\lambda_1^{-\frac14}+4c_{10}M_3}{\nu}\right)^4\right\} \tag{6.21}$$

$$\|\omega(t)-\phi^s(p,Q_Nf)\|^2\leqslant\mathrm{e}^{-\nu\lambda_{N+1}t}\|q_0-\phi^s(p,Q_Nf)\|^2 \tag{6.22}$$

证明 令 $\Delta=\omega(t)-\phi^s(p,Q_Nf)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta+\nu A\Delta+Q_NB(p+\omega,\Delta)+Q_NB(\Delta,p+\phi^s)=0 \tag{6.23}$$

将(6.23)与 $A\Delta$ 取内积,得到

$$\frac12\frac{\mathrm{d}\|\Delta\|^2}{\mathrm{d}t}+\nu|A\Delta|^2$$

$$\leqslant |(Q_N B(p+\omega,\Delta),A\Delta)| + |(Q_N B(\Delta,p),A\Delta)|$$
$$+ |(Q_N B(\Delta,\phi^s),A\Delta)|$$
$$\leqslant c_1 |p+\omega|^{\frac{1}{2}} \| p+\omega \|^{\frac{1}{2}} \|\Delta\|^{\frac{1}{2}} |A\Delta|^{\frac{1}{2}} |A\Delta|$$
$$+ 2c_5 \|\Delta\| M_1 L_N^{\frac{1}{2}} |A\Delta| + c_1 |\Delta|^{\frac{1}{2}} \|\Delta\|^{\frac{1}{2}} \|\phi^s\|^{\frac{1}{2}} |A\phi^s|^{\frac{1}{2}} |A\Delta|$$
$$\leqslant (c_1 M_3 \lambda_1^{-\frac{1}{4}} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} + 2c_5 M_1 L_N^{\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ c_1 r_1^{\frac{1}{2}} (\alpha_1 + 2\nu^{-1} f_\infty)^{\frac{1}{2}} \lambda_{N+1}^{-1}) |A\Delta|^2$$

利用(6.21)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\Delta\|^2 + \nu\lambda_{N+1} \|\Delta\|^2 \leqslant 0$$

由 Gronwall 不等式推出结论.

回到 $f=f(t)$情形,研究关于 t 的小扰动给(6.20)解带来的误差估计.

记 $\bar{p}=p(\bar{t})$, $\bar{q}=q(\bar{t})$, $Q_N\bar{f}=Q_Nf(\bar{t})$, $\bar{t}\in[T_*,\infty)$,考虑始值问题:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \nu Aq + Q_N B(u,u) = Q_N f(t)$$
$$q(\bar{t}) = \bar{q} \tag{6.24}$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \nu A\omega + Q_N B(\bar{p}+\omega,\bar{p}+\omega) = Q_N\bar{f}$$
$$\omega(\bar{t}) = \bar{q} \tag{6.25}$$

引理6.5 在上面假设条件下,如下估计成立:

$$\|q(t)-\omega(t)\| \leqslant 2\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(\alpha_3 l_2 \lambda_N^{\frac{1}{2}}\tau^\theta + l_1\tau)$$
$$\bar{t} \leqslant t \leqslant \bar{t}+\tau \tag{6.26}$$

其中 $\alpha_3=2M_1c_5L_N^{\frac{1}{2}}+c_9M_3L_N^{\frac{1}{2}}$.

证明 令 $\Delta=q(t)-\omega(t)$,有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} + \nu A\Delta + Q_N B(u,p-\bar{p}+\Delta)$$
$$+ Q_N B(p-\bar{p}+\Delta,\bar{p}+\omega)$$

$$= Q_N(f(t) - \bar{f})$$

$$\Delta(\bar{t}) = 0 \tag{6.27}$$

将(6.27)与 $A\Delta$ 取内积且对$(B(u,v),w)$估计并利用 Young 不等式得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\Delta\|^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\nu}{2}|A\Delta|^2$$

$$\leqslant \nu^{-1}(2c_5M_1L_N^{\frac{1}{2}} + c_9M_3L_N^{\frac{1}{2}})^2\|p - \bar{p}\|^2$$

$$+ \nu^{-1}|Q_N(f(t) - \bar{f})|^2$$

$$+ (2c_1M_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{4}} + c_{10}M_3\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}})|A\Delta|^2$$

利用(6.21),(6.11),(6.12),得到

$$\frac{\mathrm{d}\|\Delta\|^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\nu\lambda_{N+1}}{2}\|\Delta\|^2 \leqslant 2\nu^{-1}(\alpha_3^2l_2^2\lambda_N\tau^{2\theta} + l_1^2\tau^2)$$

由 Gronwall 不等式和 $\Delta(\bar{t})=0$,得引理结论.

综合上述引理,最后我们得到

定理 6.6 设 $f(t)$满足(6.11),且 $\sup_{t\geqslant 0}|f(t)|\leqslant f_\infty$,(6.12)成立,另外,$N$ 选取充分大使得(6.14),(6.16)(6.21)成立,则对(6.1)的任何解 $u(t)=p(t)+q(t)$和 $t\geqslant T_*$,我们有

$$\|q(t) - \phi^s(p(t),Q_Nf(t))\| \leqslant \alpha_5\lambda_{N+1}^{-\theta} + d_0\mathrm{e}^{-\nu\lambda_{N+1}(t-T_*)} \tag{6.28}$$

其中 $\alpha_5 = \alpha_4(1+(1+\mathrm{e})^{-1})$, $d_0 = \|q(T_*) - \phi^s(p(T_*), Q_Nf(T_*))\|$, $\alpha_4 = 2\nu^{-1}\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}(\alpha_3l_2\lambda_N^{\frac{1}{2}} + l_1) + \alpha_2l_2 + \nu^{-1}l_1\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}}$.

证明 取 $\tau = (\nu\lambda_{N+1})^{-1}$,由 $t_n = T_* + n\tau$,定义序列$\{t_n\}$,$\{p_n\}$,$\{Q_Nf_n\}$和$\{d_n\}$:$p_n = p(t_n)$,$Q_Nf_n = Q_Nf(t_n)$,$d_n = \|q(t_n) - \phi^s(p_n,Q_Nf_n)\|$,设 ω_n 是如下问题的解:

$$\frac{d\omega_n}{dt} + \nu A\omega_n + Q_NB(p_n+\omega_n, p_n+\omega_n) = Q_Nf_n$$

$$\omega_n(t_n) = q(t_n) \qquad t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$$

由引理 6.4,得到

$$\|\omega_n(t) - \phi^s(p_n,Q_Nf_n)\| \leqslant d_n\mathrm{e}^{-\nu\lambda_{N+1}(t-t_n)} \tag{6.29}$$

然后有

$$d_{n+1} \leqslant \| q(t_{n+1}) - \omega(t_{n+1}) \| + \| \omega(t_{n+1}) - \phi^s(p_n, Q_N f_n) \|$$
$$+ \| \phi^s(p_{n+1}, Q_N f_{n+1}) - \phi^s(p_n, Q_N f_n) \|$$

利用(6.26),(6.29),(6.18),(6.11)和(6.12),得到

$$d_{n+1} \leqslant d_n e^{-\nu\lambda_{N+1}\tau} + \alpha_4 \tau^\theta \tag{6.30}$$

由 τ 的选取有 $e^{-\nu\lambda_{N+1}\tau} = e^{-1} < 1$,从递推式(6.30),我们有

$$d_n \leqslant \frac{\alpha_4 \tau^\theta}{1 - e^{-\nu\lambda_{N+1}\tau}} + d_0 e^{-n} \qquad n \geqslant 1$$

利用(6.26),(6.30)和 d_n 的估计,我们可以得到在$[t_n, t_{n+1}]$上连续性估计,当 $t \geqslant T_*$ 时,选取 n,使 $n\tau + T_* \leqslant t \leqslant (n+1)\tau + T_*$,则

$$\| q(t) - \phi^s(p_n, Q_N f_n) \| \leqslant \| q(t) - \omega_n(t) \| + \| \omega_n(t) - \phi^s(p_n, Q_N f_n) \|$$
$$\leqslant 2\nu^{-1} \lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}} (\alpha_3 l_2 \lambda_N^{\frac{1}{2}} + l_1 \tau^\theta)$$
$$+ \left(\frac{\alpha_4 \tau^\theta}{1 - e^{-1}} + d_0 e^{-n} \right) e^{-\nu\lambda_{N+1}(t - t_n)}$$

于是

$$\| q(t) - \phi^s(p(t), Q_N f(t)) \|$$
$$\leqslant \| q(t) - \phi^s(p_n, Q_N f_n) \|$$
$$+ \| \phi^s(p_n, Q_N f_n) - \phi^s(p(t), Q_N f(t)) \|$$
$$\leqslant \alpha_5 \lambda_{N+1}^{-\theta} + d_0 e^{-\nu\lambda_{N+1}(t - T_*)}$$

推论 6.7 在定理 6.6 假设条件下,(6.1)的解 $u(t)$靠近如下流形 $M(t)$的一个邻域:

$$M(t) = \mathrm{graph}\phi^s(p, Q_N f(t)) \qquad p \in B$$

特别对于 $t \geqslant T_*$,

$$\mathrm{dist}_V(u(t), M(t))$$
$$\leqslant \mathrm{dist}_V(u(T_*) - M(T_*)) e^{-\nu\lambda_{N+1}(t - T_*)} + \alpha_5 \lambda_{N+1}^{-\theta}$$

第三章　数值逼近

在非线性发展方程解的存在性研究中,线性 Galerkin 方法作为一种逼近工具得到广泛的应用,线性 Galerkin 方法利用空间谱分解技术,将方程投影到有限维线性空间,借助于常微分方程结果,关于时间的一致性估计和紧致性方法,导出解的一个逼近结果.如果将方程投影到一个非线性流形上,并由此导出新的逼近结果,这个方法就称为非线性 Galerkin 方法,将这一方法与有限差分方法,有限元方法结合起来,就导致出 Galerkin 有限差分法,Galerkin 有限元方法,Euler-Galerkin 方法等等.

在第二章,我们介绍了 AIM 的一些构造方法,但是一方面,当 IM 存在时,所构造的 AIM 是否收敛到 IM? 这问题并没有解决,另一方面,它对于吸引子的逼近是多项式阶的,只有在满足定理 3.5 和定理 4.1 的条件下,利用解的 Gevrey 类正则性才可能得到指数阶逼近的 AIM,对于一般情况能否构造出指数阶逼近的 AIM? 这两个问题已由 Debussche 和 Temam 于 1994 年解决,本章我们将介绍多种数值逼近模式,利用非线性 Galerkin 方法构造 AIM 方法,特别介绍 Debussche-Temam(DT)构造 AIM 的逼近模式.本章主要参考文献为[30],[77]~[89].

§1　非线性 Galerkin 逼近模式

在 Hilbert 空间 H 中我们研究下面的非线性发展方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + R(u) = 0 \tag{1.1}$$

其中

$$R(u) = B(u) + Cu - f \tag{1.2}$$

这里 $\nu>0$ 是粘性参数，算子 A 假设同第二章，H 和 $V=D(A^{\frac{1}{2}})$ 中范数分别记为 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$，同第二章所设，A 的特征向量族 $\{w_j\}$ 构成 H 的一个正交基；相应特征值为 λ_j，即

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \forall j \tag{1.3}$$

$$0<\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots, \lambda_j \to \infty (\text{当 } j \to +\infty)$$

$B(u)=B(u,u)$ 是双线性算子：$V\times V\to V'$，C 是线性算子：$V\to H$，$f\in H$，记 b 是 V 上三线性型：

$$b(u,v,w) = \langle B(u,v)w\rangle_{V',V}, \quad \forall u,v,w \in V$$

设 $b(u,v,w)$ 满足第二章 §3 类似条件：

$$\begin{cases} b(u,v,w) = -b(u,w,v) \\ |b(u,v,w)| \leqslant c_1|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}} \\ |Cu| \leqslant c_2\|u\| \\ |B(u,v)| \leqslant c_3|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad u\in V, \quad v\in D(A) \\ |B(u,v)| \leqslant c_4|u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}\|v\| \qquad u,v\in D(A) \end{cases} \tag{1.4}$$

$$((\nu A + C)u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2 \qquad u\in D(A) \tag{1.5}$$

其中 $\alpha>0$.

给定初始条件

$$u(0) = u_0 \qquad u_0 \in H \tag{1.6}$$

非线性 Galerkin 方法就是利用 A 的特征函数构成的 H 的基，对每个整数 m，寻找(1.1)，(1.6)的如下形式的逼近解：

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j, u_m: R^+ \to W_m = \text{span}\{w_1,\cdots,w_m\},$$

$$z_m(t) = \sum_{j=m+1}^{2m} h_{jm}(t)w_j, z_m: R^+ \to \widetilde{W}_m = \text{span}\{w_{m+1},\cdots,w_{2m}\},$$

(u_m,z_m) 满足：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_m,v) + \nu((u_m,v)) + (Cu_m,v) + b(u_m,u_m,v)$$

$$+ b(z_m, u_m, v) + b(u_m, z_m, v) = (f, v), \forall v \in W_m \tag{1.7}$$

$$\nu((z_m, \tilde{v})) + (Cz_m, \tilde{v}) + b(u_m, u_m, \tilde{v}) = (f, \tilde{v}), \forall \tilde{v} \in \widetilde{W}_m \tag{1.8}$$

$$u_m(0) = P_m u_0 \tag{1.9}$$

利用(1.5)改写(1.8)为

$$z_m = (\nu A + (P_{2m} - P_m)C)^{-1}(P_{2m} - P_m)(f - B(u_m)) \tag{1.10}$$

这样(1.7),(1.8)就等价于常微分方程组(1.10)和(1.11):

$$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} + \nu A u_m + P_m(Cu_m + B(u_m) + B(z_m, u_m) + B(u_m, z_m)) = P_m f \tag{1.11}$$

定理 1.1 设(1.2)~(1.5)成立,对于 $u_0 \in H$,则(1.9),(1.11)的解当 $m \to \infty$ 时收敛到(1.1),(1.6)的解 $u(t)$:

对所有 $T>0$,和 $1 \leqslant p < \infty$,在 $L^2(0,T;V)$ 和 $L^p(0,T;H)$ 中 u_m 强收敛到 u;在 $L^\infty(R^+;H)$ 中 u_m 弱 * 收敛到 u.

证明 在(1.7)(1.8)中取 $v = u_m$, $\tilde{v} = z_m$ 且略去下标 m,利用(1.4)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \nu\|u\|^2 + (Cu, u) + \nu\|z\|^2 + (Cz, z) = (f, u + z) \tag{1.12}$$

利用(1.5)有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \alpha(\|u\|^2 + \|z\|^2)$$

$$\leqslant |f|\,|u + z| \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}}|f|\,\|u + z\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha\lambda_1^{-1}}|f|^2 + \frac{\alpha}{2}(\|u\|^2 + \|z\|^2)$$

这就推出:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u|^2 + \alpha(\|u\|^2 + \|z\|^2) \leqslant \frac{2|f|^2}{\alpha\lambda_1} \tag{1.13}$$

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(0)|^2 \exp(-\alpha\lambda_1 t) + \frac{2|f|^2}{\lambda_1^2\alpha^2}(1-\exp(-\alpha\lambda_1 t)),$$
$$\forall t \geqslant 0$$

这表明当 $m\to\infty$时,$u_m \in L^\infty(R^+;H)$仍是有界集,返回(1.13)对任何 $T>0$ 积分 $t:(0,T)$,得到 u_m 和 z_m 当 $m\to\infty$时仍是 $L^2(0,T;V)$中有界集.

从(1.8)中得到

$$\nu\|z\|^2 + (Cz,z) = -b(u,u,z) + (f,z)$$

我们得到

$$\alpha\|z\|^2 \leqslant |B(u)||z| + |f||z|$$
$$\leqslant c_3|u|^{\frac{1}{2}}\|u\||Au|^{\frac{1}{2}}|z| + |f||z| \qquad (1.14a)$$

利用

$$|Au_m|^{\frac{1}{2}} \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{4}}\|u_m\|, \|u_m\| \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{2}}|u_m|$$
$$|Az_m| \geqslant \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|, \|z_m\| \geqslant \lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}|z_m|$$

得到

$$\alpha\lambda_{m+1}|z_m|^2 \leqslant c_3\lambda_m|u_m|^2|z_m| + |f||z_m|$$

这表明

$$\alpha\lambda_{m+1}|z_m| \leqslant c_3\lambda_m|u_m|^2 + |f| \qquad (1.14b)$$

得到当 $m\to+\infty$时,z_m 是$L^\infty(R_+,H)$中有界集.

由于 $\lambda_1 \leqslant \lambda_m \leqslant \lambda_{m+1}$,有

$$\alpha\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}|z_m| \leqslant c_3|u_m|\|u_m\| + \lambda_{m+1}^{-\frac{1}{2}}|f| \qquad (1.15)$$

结合(1.13),这表明对任何 $T>0$,$\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}z_m$ 当 $m\to+\infty$时,仍为$L^2(0,T;H)$中有界集.

利用(1.4),$\|B(u,v)\|_{V'} \leqslant c_1|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}|v|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}$,$\forall u,v\in V$,以及对$|u_m|$,$\|u_m\|$,$|z_m|$,$\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}|z_m|$的一致性估计,得到 $B(u_m)$,$B(z_m,u_m)$和 $B(u_m,z_m)$在 $L^2(0,T;V')$中有

界，而 Cu_m 在 $L^2(0,T;H)$ 中有界，从而对任何 $T>0$，$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}$ 对于 $m\to+\infty$ 仍在 $L^2(0,T;V')$ 中有界.

利用上述估计，我们有

对所有 $T>0$，当 $m\to+\infty$ 时，$z_m\to0$（在 $L^2(0,T;H)$ 中强收敛），且在 $L^2(0,T;V)$ 中 $z_m\to0$（弱收敛），而在 $L^\infty(R_+,H)$ 中 z_m 弱 * 收敛到零，再由一致有界性估计得到：存在一个收敛子列 $u_{m'}$，当 $m'\to+\infty$ 时有：$\forall\, T>0$，

$u_{m'}\rightharpoonup u^*$：在 $L^2(0,T;V)$ 中弱收敛，在 $L^\infty(R_+,H)$ 中弱 * 收敛而 $\frac{\mathrm{d}u_{m'}}{\mathrm{d}t}\rightharpoonup\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}t}$：在 $L^2(0,T;V')$ 中弱收敛，再由紧致性定理得到：$\forall\, T>0$，当 $m'\to+\infty$ 时，

$$u_{m'}\to u^*\text{：在 } L^2(0,T;H) \text{ 中强收敛.}$$

对于非线性项，令 $v\in W_m$，且令 $m'\geqslant m$，从(1.4)有

$$b(u_{m'},u_{m'},v)=-b(u_{m'},v,u_{m'})$$

而 $b(\cdot,v,\cdot)$ 是 $V\times H\to R$ 的双线性连续映射，因此，$b(u_{m'},v,u_m)\to b(u^*,v,u^*)$ 在 $L^1(0,T)$ 中强收敛，从而对任何 $T>0$，当 $m'\to+\infty$ 时，在 $L^1(0,T)$ 中 $b(u_{m'},u_{m'},v)$ 强收敛到 $b(u^*,u^*,v)$，类似有

$$b(z_{m'},u_{m'},v)\to b(0,u^*,v)=0,\quad m'\to+\infty$$

$$b(u_{m'},z_{m'},v)\to b(u^*,0,v)=0,\quad m'\to+\infty$$

在(1.7)中取极限，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^*,v)+\nu((u^*,v))+(Cu^*,v)+b(u^*,u^*,v)=(f,v) \tag{1.16}$$

$\forall\, v\in W_m$ 成立，又由连续性，对所有 $v\in V$ 成立. 对于 $u_{m'}(0)$ 有 $u_{m'}(0)\rightharpoonup u^*(0)$ 在 H 中弱收敛，且有 $u^*(0)=u_0$，这表明 u^* 是(1.1)，(1.6)的解，因此 $u^*=u$ 且整个序列 u_m 收敛到 u.

为完成定理 1.1 证明在 $L^2(0,T;H)$ 中强收敛性，记

$$Z_m = \frac{1}{2}|u_m(T) - u(T)|^2 + \int_0^T \{\nu \| u_m - u \|^2 + (C(u_m - u), u_m - u) + \nu \| z_m \|^2 + (Cz_m, z_m)\} \mathrm{d}t \tag{1.17}$$

如果我们能证明

$$\lim_{m \to \infty} Z_m = 0 \tag{1.18}$$

则利用(1.5)和(1.17)就得到:在 $L^2(0,T;V)$ 中 u_m 强收敛到 u,而对任何 $t \geqslant 0$, u_m 在 H 中强收敛到 u.再利用 u_m 在 $L^\infty(R_+,H)$ 中有界性,利用 Lebesgue 区域收敛定理,得到对任何 $1 \leqslant p < \infty$, u_m 在 $L^p(0,T;H)$中强收敛到 $u(t)$. 同时由(1.17),在 $L^2(0,T;V)$中 z_m 强收敛到零.

现在证明(1.17),积分(1.12),有

$$\frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \int_0^T \{\nu \| u_m \|^2 + (Cu_m, u_m) + \nu \| z_m \|^2 + (Cz_m, z_m)\} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \int_0^T (f, u_m + z_m) \mathrm{d}t$$

于是 Z_m 可以改写为

$$Z_m = -(u_m(T), u(T)) + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \int_0^T \{-2\nu((u_m, u)) + \nu \| u \|^2 - (Cu, u_m - u) - (Cu_m, u) + (f, u_m + z_m)\} \mathrm{d}t \tag{1.19}$$

(1.19)是关于 u_m, z_m 的线性表式,令 $m \to +\infty$,有

$$\lim_{m \to +\infty} Z_m = -\frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u(0)|^2 + \int_0^T \{-\nu \| u \|^2 - (Cu, u) + (f, u)\} \mathrm{d}t$$

利用(1.16),用 u, u 代替 u^*, v,得到

$$\lim_{m \to +\infty} Z_m = 0$$

基于非线性 Galerkin 方法，我们进一步可以证明

定理 1.2 在定理 1.1 同样假设条件下，对于 $u_0 \in V$，(1.11)，(1.9)的解 u_m 当 $m \to \infty$ 时在以下意义下收敛到(1.1)，(1.6)的解 $u(t)$.

$u_m \to u$：在 $L^2(0,T;D(A))$ 和 $L^p(0,T,V)$ 中强收敛，对所有 $T>0$ 和所有 $1 \leqslant p < +\infty$ 成立，$u_m \to u$：在 $L^\infty(R^+,V)$ 中弱 * 收敛. (1.20)

证明 在(1.7)，(1.8)中分别令 $v = Au_m$ 和 $\tilde{v} = Az_m$，并将两式相加得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| u_m \|^2 + \nu | Au_m |^2 + \nu | Az_m |^2 \\
&= (f, A(u_m + z_m)) - (Cu_m, Au_m) - (Cz_m, Az_m) \\
&\quad - b(u_m, u_m, Au_m) - b(z_m, u_m, Au_m) - b(u_m, z_m, Au_m) \\
&\quad - b(u_m, u_m, Az_m)
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

对(1.21)右边各项分别估计有

$$|(f, A(u_m + z_m))| \leqslant \frac{\nu}{12}(|Au_m|^2 + |Az_m|^2) + \frac{6}{\nu}|f|^2$$

$$|(Cu_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{3c_2^2}{\nu}\| u_m \|^2$$

类似估计 $|(Cz_m, Az_m)|$，

$$|b(u_m, u_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{c_5}{\nu}|u_m|^2 \| u_m \|^4$$

$$|b(z_m, u_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{c_5}{\nu}|z_m|^2 \| z_m \|^2 \| u_m \|^2$$

$$|b(u_m, z_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{\nu}{12}|Az_m|^2$$

$$+ \frac{c_7}{\nu^2}|u_m|^2 \| u_m \|^2 \| z_m \|^2$$

$$|b(u_m, u_m, Az_m)| \leqslant \frac{\nu}{12}|Au_m|^2 + \frac{\nu}{12}|Az_m|^2$$

$$+\frac{c_7}{\nu^2}|u_m|^2\|u_m\|^4$$

综合以上各式有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+\nu|Au_m|^2+\nu|Az_m|^2$$

$$\leqslant\frac{12}{\nu}|f|^2+\frac{6c_2^2}{\nu}\|z_m\|^2$$

$$+c_8(\nu)\|u_m\|^2(1+|u_m(t)|^2\|u_m\|^2$$

$$+|z_m|^2\|z_m\|^2+|u_m|^2\|z_m\|^2) \qquad (1.22)$$

利用一致 Gronwall 不等式和 u_m,z_m 分别在 $L^\infty(R^+,H)$ 中有界性,就得到

$$\|u_m(t)\|^2\leqslant c_9,\quad \forall t\geqslant 1$$

其中 $c_9(\nu)$ 与 m 无关,这表明:

$$u_m\in L^\infty(R_+,V)\text{ 当 } m\to+\infty\text{,有界} \qquad (1.23)$$

返回(1.22),又得到

对所有 $T>0$,当 $m\to\infty$ 时,u_m 和 z_m 在 $L^2(0,T;D(A))$ 中有界 (1.24)

在(1.8)中取 $\widetilde{v}=Az_m$,可以推得

$$\nu|Az_m|\leqslant c_2\|z_m\|+c_3|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\||Au_m|^{\frac{1}{2}}+|f|$$

从而

$$\nu\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}\|z_m\|\leqslant c_2\|z_m\|+c_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}+|f|$$

这就推得

$$\|z_m\|\leqslant\frac{1}{\nu\lambda_{m+1}^{\frac{1}{2}}-c_2}(c_3\lambda_m^{\frac{1}{4}}|u_m|^{\frac{1}{2}}\|u_m\|^{\frac{3}{2}}+|f|)$$

结合(1.23),表明:

当 $m\to\infty$ 时,在 $L^\infty(R_+,V)$ 中 z_m 强收敛到零. (1.25)

类似定理 1.1 推导,有

对所有 $T>0$,当 $m\to+\infty$ 时,$\frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}\in L^2(0,T;H)$ 且有界 (1.26)

类似定理 1.1，当 $m \to +\infty$ 时，对所有 $T>0$，有

$$\begin{cases} u_m \to u: \text{在 } L^2(0,T;D(A)) \text{ 中弱收敛} \\ u_m \to u: \text{在 } L^\infty(R_+,V) \text{ 中弱 * 收敛} \\ \dfrac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t} \to \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}: \text{在 } L^2(0,T;H) \text{ 中弱收敛} \\ z_m \to 0: \text{在 } L^2(0,T;D(A)) \text{ 中弱收敛} \end{cases} \tag{1.27}$$

下面证明强收敛性：

记 $Y_m = \frac{1}{2} \| u_m(T) - u(T) \|^2 + \nu \int_0^T (|Au_m - Au|^2$

$+ |Az_m|^2)\mathrm{d}s$，

若能证明

$$\lim_{m \to +\infty} Y_m = 0$$

就推得定理 1.2 结论.

对 t 在 $(0,T)$ 上积分 (1.21)，利用它，Y_m 可改写为

$$Y_m = -((u_m(T),u(T))) + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2$$
$$+ \nu\int_0^T(-2(Au_m,Au) + |Au|^2)\mathrm{d}s + Z_m \tag{1.28}$$

其中

$$Zm = \int_0^T \{(f,A(u_m + z_m)) - (Cu_m,Au_m) - (Cz_m,Az_m)$$
$$- b(u_m,u_m,Au_m) - b(z_m,u_m,Au_m) - b(u_m,z_m,Au_m)$$
$$- b(u_m,u_m,Az_m)\}\mathrm{d}s \tag{1.29}$$

从 (1.27) 推得

$$\lim_{m \to +\infty} \left\{-((u_m(T),u(T))) - 2\nu\int_0^T (Au_m,Au)\mathrm{d}s\right\}$$
$$= -\|u(T)\|^2 - 2\nu\int_0^T |Au|^2\mathrm{d}s$$

利用 u_m, z_m 在 $L^2(0,T;D(A))$ 中弱收敛，在 $L^2(0,T;V)$ 中强收敛以及在 $L^\infty(0,T;V)$ 中有界，可对 Z_m 取极限.

$$\int_0^T b(u_m,u_m,Au_m)\mathrm{d}s - \int_0^T b(u,u,Au)\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^T b(u_m - u,u_m,Au_m)\mathrm{d}s + \int_0^T b(u,u_m - u,Au_m)\mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^T b(u,u,A(u_m - u))\mathrm{d}s \tag{1.30}$$

利用(1.4),Hölder 不等式以及 $u_m \in L^\infty(0,T,V)$,有

$$\left|\int_0^T b(u_m - u,u_m,Au)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant c\int_0^T |u_m - u|^{\frac{1}{2}}|A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}}|Au_m|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant c\left(\int_0^T |u_m - u|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T |A(u_m - u)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$\times\left(\int_0^T |Au_m|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

右边各项有界,于是 $m \to +\infty$,以零为极限.

对(1.30)右边第二项,

$$\left|\int_0^T b(u,u_m - u,Au_m)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant c\int_0^T \|u_m - u\|^{\frac{1}{2}}|A(u_m - u)|^{\frac{1}{2}}|Au_m|\mathrm{d}s$$
$$\leqslant c\left(\int_0^T \|u_m - u\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_0^T |A(u_m - u)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$\times\left(\int_0^T |Au_m|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

当 $m \to +\infty$,也以零为极限.

对(1.30)右边第 3 项,注意关于 u_m 是线性的,易证也以零为极限.于是

$$\int_0^T b(u_m,u_m,Au_m)\mathrm{d}s \to \int_0^T b(u,u,Au)\mathrm{d}s$$

类似处理 Z_m 的其余各项,于是有

$$\lim_{m\to+\infty} Y_m = -\frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \nu\int_0^T |Au|^2 ds$$

$$+\int_0^T \{(f,Au) - (Cu,Au) - b(u,u,Au)\} ds$$

$$= 0 \quad (\text{用 } u, Au \text{ 代替 } u^*, v, \text{积分}(1.16)).$$

注 1 由非线性 Galerkin 方法,我们从辅助方程出发,就可以构造出近似惯性流形.例如从(1.8)令 $2m$ 为∞,即 $z_m = Q_m u$,则

$$(I - P_m)\varphi = (\nu A + C)^{-1}(I - P_m)(f - B(P_m\varphi))$$

特别取 $C=0$ 时,就是第二章§3 的 $\phi(p)$.

再从(1.32)出发,有

$$(I - P_m)\varphi = (\nu A + C)^{-1}(I - P_m)(-B(P_m\varphi + Q_m\varphi, P_m\varphi) - B(P_m\varphi, Q_m\varphi) + f)$$

取 $C=0$,有

$$\varphi = (\nu A)^{-1}(I - P_m)(f - B(p + \varphi, p) - B(p, \varphi))$$

利用与第二章§3 构造 $\phi^s(p)$相同的技巧,可以证明 graph$(\phi(p))$是一个近似惯性流形,且与 graph$\phi^s(p)$有相同的逼近阶数.

§2 Galerkin 有限差分逼近

本节我们给出逼近非线性发展方程的一种数值逼近模式:Galerkin 有限差分逼近.

我们用 V_h 表示有限维向量空间,具有两个标量积和范数 $((\cdot))_h$, $\|\cdot\|_h$, $(\cdot)_h$, $|\cdot|_h$, V_h 是 Sobolev 空间的标准逼近, $\|\cdot\|_h$是离散 Sobolev 范数, $|\cdot|_h$ 是离散 L^2 范数, $V_h \subset \{V_h\}$, $h \in \mathscr{H}$,当 $h\to 0$ 时趋近于一个无穷维空间 V,用 c_i 表示与 h 无关的常数,用 $s_i = s_i(h)$表示仅与 h 有关的常数,且当 $h\to 0$ 时, $s_i(h)\to 0$,设 V_h 中两个范数以如下方式联系:

$$|u_h|_h \leqslant c_1\|u_h\|_h, \quad s_1(h)\|u_h\|_h \leqslant |u_h|_h, \quad \forall u_h \in V_h \tag{2.1}$$

在 V_h 上给出双线性连续形式$a_h(\cdot,\cdot)$,满足

$$|a_h(u_h,v_h)|\leqslant c_2\|u_h\|_h\|v_h\|_h,\forall u_n,v_h\in V_h \quad (2.2)$$

在 V_h 上给出三线性形式$b_h(\cdot,\cdot,\cdot)$,满足

$$b_h(u_h,v_h,v_h)=0 \quad \forall u_h,v_h\in V_n \quad (2.3)$$

$$|b_h(u_h,v_h,w_h)|\leqslant c_3|u_h|_h^{\frac{1}{2}}\|u_h\|_h^{\frac{1}{2}}\|v_h\|_h|w_h|_h^{\frac{1}{2}}\|w_h\|_h^{\frac{1}{2}}$$
$$\forall u_h,v_h,w_h\in V_h \quad (2.4)$$

在 V_h 上一个双线性连续形式$d_h(\cdot,\cdot)$,使得:

$$|d_h(u_h,v_h)|\leqslant c_4\|u_h\|_h\|v_h\|_h \quad \forall u_h,v_h\in V_h \quad (2.5)$$

$$a_h(u_h,u_h)+d_h(u_h,u_h)\geqslant c_5\|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h\in V_h \quad (2.6)$$

然后研究始值问题:

寻找函数 $u_h:R_+\to V_h$,使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_h,v_h)_h+a_h(u_h,v_h)+b_h(u_h,u_h,v_h)+d_h(u_h,v_h)$$
$$=(f_h,v_h) \quad \forall v_h\in V_h \quad (2.7)$$

$$u_h(0)=u_{0h} \quad (2.8)$$

其中 $u_{0h}\in V_h,f_h\in L^\infty(R_+;V_h)$.由于 V_h 有限维,由(2.3),问题(2.7),(2.8)有唯一解

$$u_h\in L^\infty(R_+;V_h) \quad (2.9)$$

且 $u_h:R_+\to V_h$ 以范$|\cdot|_h$ 有界且与h 无关.

固定 h,考虑取 h 为h_2 时的空间 $V_{h_2}\subset V_h$,用 W_h 表示V_{h_2}在 V_h 中的补,于是

$$V_h=V_{h_2}\oplus W_h \quad (2.10)$$

V_h 中元记为$u_h,v_h,\cdots,V_{h_2}$中元记为 $y_h,\tilde{y}_h,\cdots,W_h$ 中元记为z_h,$\tilde{z}_h,\cdots$,于是任何 $u_h\in V_h$ 可唯一表为

$$u_h=y_h+z_h,\ y_h\in V_{h_2},\ z_h\in W_h \quad (2.11\text{a})$$

y_h 称为u_h 的大波长分量,z_h 称为u_h 的小波长分量.

我们给出在不同格式下(2.10)的三种重要分解:谱离散化情形,有限元情形和有限差分情形.谱离散情形类似于非线性

Galerkin 方法,有限元情形将在§3 详细给出,本节仅给出有限差分情形(2.10)的分解.

假设我们考虑在 $V = H_0^1(0,L)$ 中一个连续问题的有限差分逼近,然后令 $h = L/2N, N \in N$, V_h 是在 $[jh,(j+1)h)$, $j = 0,1,\cdots,2N-1$ 中等于常数而在 $[0,h)$ 和 $[L-h,L)$ 中等于零的阶梯函数空间. 于是, $V_h = \text{Span}\{w_{1,h},\cdots,w_{2N-2,h}\}$, 其中 $w_{j,h} \in V_h$, 在 $[jh,(j+1)h)$ 中等于 1, 在其余区间为零.

$$u_h = \sum_{j=1}^{2N-2} u_h(jh) w_{j,h}, \quad \forall u_h \in V_h$$

$\{w_{j,h}\}$ 称为 V_h 的自然基,赋以 V_h 标量积:

$$((u_h, v_h))_h = \int_0^{L-h} \nabla_h u_h \nabla_h v_h \mathrm{d}x$$

$$(u_h, v_h)_h = \int_0^L u_h v_h \mathrm{d}x$$

其中 ∇_h 为前向有限差分算子:

$$(\nabla_h \varphi)(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

然后令 $h_2 = 2h$ 且以类似的方法定义 $V_{h_2} = V_{2h}$, $w_{j,2h}$ 组成它的一个基 $(j = 1,\cdots,N-2)$, 这里 $2 = h_2/h_1$ 的选取完全是任意的,我们可用任何其他正整数代替比值 h_2/h_1; 由 h_1, h_2 的选取知 $V_{2h} \subset V_h$, 然后我们定义:

$$W_h = \text{span}\{w_{1,h}, w_{3,h}, \cdots, w_{2N-3,h}, w_{2N-2,h}\}$$

任何 $u_h \in V_h$ 可以表示为

$$u_h = y_h + z_h, \quad y_h \in V_{2h}$$

$$y_h = \sum_{j=1}^{N-2} u_h(2jh) w_{j,2h} \tag{2.11b}$$

$$z_h = \sum_{i=0}^{N-2} z_h((2i+1)h) w_{2i+1,h} + z_h((2N-2)h) w_{2N-2,h}$$

其中对于 $i = 0,\cdots,N-2$,

$$z_h((2i+1)h) = \bar{u}_h((2i+1)h) = u_h((2i+1)h) - u_h(2ih) \tag{2.12}$$

和

$$z_h((2N-2)h) = u_h((2N-2)h) \tag{2.13}$$

显然,如果 u_h 是光滑函数 $u \in H_0^1(0,L)$ 在 V_h 上的限制,则 y_h 与 u_h 同阶,而 z_h 却因有因子 h 而更小些,这也就导致了大小波长.

引理 2.1 我们有加强的 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$|((y_h, z_h))_h| \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}} \| y_h \|_h \| z_h \|_h, \forall y_h \in V_{2h}, \forall z_h \in W_h \tag{2.14}$$

证明 我们必须证明

$$\int_0^{L-h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\int_0^{L-h} |\nabla_h y_h|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_0^{L-h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

只须用任一区段$(2jh, 2(j+1)h)$代替$(0,L)$证明(2.15)即可.

我们先对 $j=1,\cdots,N-3$ 相应区间上证明.则

$$y_h = \begin{cases} m_1 & x \in [2jh, 2(j+1)h) \\ m_2 & x \in [2(j+1)h, 2(j+2)h) \end{cases}$$

$$z_h = \begin{cases} 0 & x \in [2jh, (2j+1)h) \\ p_1 & x \in [(2j+1)h, 2(j+1)h) \\ 0 & x \in [2(j+1)h, (2j+3)h) \\ p_2 & x \in [(2j+3)h, 2(j+2)h) \end{cases}$$

于是

在$[2jh, (2j+1)h)$ 上, $\nabla_h y_h = 0, \nabla_h z_h = \dfrac{p_1}{h}$

在$[(2j+1)h, 2(j+1)h)$ 上, $\nabla_h y_h = \dfrac{m_2 - m_1}{h}, \nabla_h z_h = \dfrac{-p_1}{h}$

因此

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x = -\frac{1}{h}(m_2 - m_1) p_1$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h y_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{h}|m_2 - m_1||p_1| \tag{2.16}$$

我们然后考虑终点区间，即 $j=0$ 和 $j=N-2,N-1$，对于 $j=0$，$m_1=0$，其余不变，故(2.16)仍然正确. 对于$[L-4h, L-2h)$和$[L-2h, L-h)$我们一起考虑，而注意在$[L-2h, L-h)$上 $z_h \neq 0$，但在$[L-h, L)$上 $z_h=0$，于是

$$\int_{L-4h}^{L-h} \nabla_h y_h \nabla_h z_h \mathrm{d}x = -\frac{1}{h} m_1 (p_2 - p_1)$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{3}}|m_1|((p_2-p_1)^2 + p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\int_{L-4h}^{L-h} |\nabla_h y_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\int_{L-4h}^{L-h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

由于$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{2}{3}}$，从而得(2.14).

引理 2.2 对于 W_h 中函数，强离散型 Poincare 不等式成立.

$$|z_h|_h \leqslant s_2(h)\|z_h\|_h, \forall z_h \in W_h, s_2(h) = h \tag{2.17}$$

证明 如同引理 2.1 那样，我们只须在$[2jh, 2(j+1)h)$上证明类似不等式，$(j=0,\cdots,N-1)$，即

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} z_h^2 \mathrm{d}x \leqslant s_2(h)^2 \int_{2jh}^{2(j+1)h} |\nabla_h z_h|^2 \mathrm{d}x \tag{2.18}$$

利用引理 2.1 相同记号，对于 $j=0,\cdots,N-3$，(2.18)右边等于 $2p_1^2/h$，而左边积分等于 $p_1^2 h$，因此(2.18)中 $s_2(h)=h/\sqrt{2}$，在$(L-4h, L)$中，z_h^2 积分等于 $h(p_1^2+p_2^2)$，而 $|\nabla_h z_h|^2$ 积分等于 $\frac{1}{h}((p_1-p_2)^2+p_1^2+p_2^2)$，从而取 $s_2(h)=h$ 就得(2.18).

下面我们证明(2.1)的第二个不等式. 令 $\xi_j = u_h(jh)$，于是

$u_h = \sum_{j=1}^{2N-2} \xi_j w_{j,h}$，而

$$|u_h|_h^2 = h\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2$$

$$\begin{aligned}\|u_h\|_h^2 &= \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}(\xi_{j+1}-\xi_j)^2\\ &\leqslant \frac{4}{h}\sum_{j=1}^{2N-2}\xi_j^2 \quad (\text{因为 } \xi_0 = \xi_{2N-1} = 0)\\ &= \frac{4}{h^2}|u_h|_h^2\end{aligned}$$

取 $s_1(h) = h/2$，就得到(2.1)的第二个不等式.

引理 2.3 下面等式成立：

$$|y_h|_h = |y_h|_{2h},\ \|y_h\|_h^2 = 2\|y_h\|_{2h}^2,\ \forall y_h \in V_{2h} = V_{h_2} \tag{2.19}$$

证明 第一个等式显然，因为 $|\cdot|_h$，$|\cdot|_{2h}$ 都是 L^2 范. 对第二个等式，注意到在 $[2jh, 2(j+1)h)$ 上 $\nabla_{2h}y_h$ 等于 $\frac{m_2-m_1}{2h}$，而 $\nabla_h y_h$ 在 $[2jh, (2j+1)h)$ 上为零，在 $[(2j+1)h, (2j+2)h)$ 上等于 $\frac{m_2-m_1}{h}$，因此

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_{2h}y_h|^2\mathrm{d}x = \frac{(m_2-m_1)^2}{2h} = \frac{1}{2}\int_{2jh}^{2(j+1)h}|\nabla_h y_h|^2\mathrm{d}x$$

对 $j = 0, \cdots, N-2$ 求和就得(2.19)第二等式.

注：V_{h_2} 与 V_h 起相同的作用，因此(2.1)～(2.6)对 V_{h_2} 也正确，特别(2.1)的第二式，结合(2.18)～(2.19)，有

$$\bar{s}_1(h)\|y_h\|_h \leqslant |y_h|_h,\ \forall y_h \in V_{h_2} = V_{2h} \tag{2.20}$$

其中 $\bar{s}_1(h) = s_1(2h)/\sqrt{2}$.

基于 V_h 的分解(2.10)，我们描述时间离散化方程(2.7)，这里可以给出四种逼近模式，前两种模式线性项全部隐式而非线性项部分或全部显式给出，第三种模式非线性项显式给出，而线性项

对于大波长是显式而对小波长隐式给出，第四种模式与前面不同的是 z 的时间发展项消失，如同非线性 Galerkin 方法. 下面我们给出四种逼近模式，但仅就第一种模式证明解的存在性和逼近方式的稳定性.

第一模式：

将(2.8)初值 u_{0h} 分解：

$$u_{0h} = y_h^0 + z_h^0, y_h^0 \in V_{h_2}, z_h^0 \in W_h \tag{2.21}$$

然后以下面方式递归定义 $y_h^n \in V_{h_2}, z_h^n \in W_h$：

当 y_h^n, z_h^n 已知，定义 $y_h^{n+1} \in V_{h_2}$ 和 $z_h^{n+1} \in W_h$：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h)\\&\quad + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, z_h^n, \hat{y}_h) + b_h(z_h^n, y_h^n, \hat{y}_h)\\&= (f_h^n, \hat{y}_h)_h, \quad \forall\ \hat{y}_h \in V_{h_2}\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}(z_h^{n+1} - z_h^n, \hat{z}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{z}_h)\\&\quad + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{z}_h) = (f_h^n, \hat{z}_h)_h, \quad \forall\ \hat{z}_h \in W_h\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中 $k = \Delta t$ 为时间步长，$f_h^n = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f(t)\mathrm{d}t$.

(2.22)～(2.23)是 y_h^{n+1}, z_h^{n+1} 的线性方程组，由(2.6)，利用 Lax-Milgram 定理得到解的存在唯一性.

第二模式：

将(2.22)中 b_h 项中的 z_h^n 换为 z_h^{n+1}，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + d_h(y_h^{n+1} + z_h^{n+1}, \hat{y}_h)\\&\quad + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(z_h^{n+1}, y_h^n, \hat{y}_h)\\&= (f_h^n, \hat{y}_h)_h, \quad \forall\ \hat{y}_h \in V_{h_2}\end{aligned} \tag{2.22'}$$

其中对每个 n，(2.22′)～(2.23)解的存在性证明仍由 Lax-Milgram 定理推出，但必须在证明了先验估计后才能应用这一定理.

第三模式：

当 y_h^n, z_h^n 已知后，用如下等式定义 $y_h^{n+1} \in V_{h_2}$ 和 $z_h^{n+1} \in W_h$：

$$\frac{1}{k}(y_h^{n+1} - y_h^n, \hat{y}_h)_h + a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h)$$
$$+ b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{y}_h) + b_h(y_h^n, z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + b_h(z_h^{n+1}, y_h^n, \hat{y}_h)$$
$$= (f_h^n, \hat{y}_h)_h \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{k}(z_h^{n+1} - z_h^n, \hat{z}_h)_h + a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h) + d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{y}_h)$$
$$+ b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{z}_h) = (f_h^n, \hat{z}_h)_h, \quad \forall \hat{z}_h \in W_h \tag{2.25}$$

先利用(2.6)和 Lax-Milgram 定理从(2.25)中解出 z_h^{n+1}，代入(2.24)再解出 y_h^{n+1}.

第四模式：

对(2.25)中由于 $z_h^{n+1} - z_h^n$ 是小结构项的发展，它是迟缓的，故可丢弃，导致类似非线性 Galerkin 模式.(2.25)由下式代替：

$$a_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + d_h(y_h^n + z_h^{n+1}, \hat{z}_h) + b_h(y_h^n, y_h^n, \hat{z}_h)$$
$$= (f_h^n, \hat{z}_h)_h, \quad \forall \hat{z}_h \in W_h \tag{2.26}$$

由(2.6)和 Lax-Milgram 定理，对(2.26)得到 z_h^{n+1} 的存在性，然后再从(2.24)中确定 y_h^{n+1}.

对所有模式，我们令

$$u_h^n = y_h^n + z_h^n \in V_h, \forall n \tag{2.27}$$

期望 u_h^n 是 $u_h(nk)$ 在 $k \to 0$ 时的一个近似.

我们利用能量方法获得 y_h^n 和 z_h^n 的先验估计(与 k 和 h 无关)继而得到关于 k 和 h 的一些条件以保证逼近方式的稳定性.为简便起见，省略下标 h，且仅就第一模式研究.利用

$$2(a - b, a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$$
$$2(a - b, b) = |a|^2 - |b|^2 - |a - b|^2$$

在(2.22)和(2.23)中用 $2ky_h^{n+1}$ 代替 $\hat{y}_h$，用 $2kz_h^{n+1}$ 代替 $\hat{z}_h$，得到

$$|y^{n+1}|^2 - |y^n|^2 + |y^{n+1} - y^n|^2 + 2ka(u^{n+1}, y^{n+1})$$
$$+ 2kd(u^{n+1}, y^{n+1}) + 2kb(y^n, y^n, y^{n+1}) + 2kb(y^n, z^n, y^{n+1})$$
$$+ 2kb(z^n, y^n, y^{n+1}) = 2k(f^n, y^{n+1}) \tag{2.28}$$
$$|z^{n+1}|^2 - |z^n|^2 + |z^{n+1} - z^n|^2 + 2ka(u^{n+1}, z^{n+1})$$
$$+ 2kd(u^{n+1}, z^{n+1}) + 2kb(y^n, y^n, z^{n+1})$$
$$= 2k(f^n, z^{n+1}) \tag{2.29}$$

将两式相加,利用(2.3)和(2.6),有

$$(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2) - (|y^n|^2 + |z^n|^2)$$
$$+ |y^{n+1} - y^n|^2 + |z^{n+1} - z^n|^2$$
$$+ 2ka(u^{n+1}, u^{n+1}) + 2kd(u^{n+1}, u^{n+1})$$
$$= 2k(f^n, u^{n+1}) - 2kb(u^n, y^n, y^{n+1} - y^n)$$
$$- 2kb(y^n, z^n, y^{n+1} - y^n) - 2kb(y^n, y^n, z^{n+1} - z^n) \tag{2.30}$$

利用(2.1)和(2.6),

$$2ka(u^{n+1}, u^{n+1}) + 2kd(u^{n+1}, u^{n+1}) \geqslant 2kc_5 \| u^{n+1} \|^2$$

$$2k(f^n, u^{n+1}) \leqslant c_5 k \| u^{n+1} \|^2 + \frac{kc_1^2}{c_5} |f^n|^2,$$

然后利用(2.4),(2.1)的第二个不等式,(2.4)和(2.20)估计 b 项,有

$$2kb(u^n, y^n, y^{n+1} - y^n) \leqslant 2kc_3 |u^n|^{\frac{1}{2}} \| u^n \|^{\frac{1}{2}} \| y^n \|$$
$$\times |y^{n+1} - y^n|^{\frac{1}{2}} \| y^{n+1} - y^n \|^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 2kc_3(s_1 \bar{s}_1)^{-\frac{1}{2}} |u^n| \, \| y^n \| \, |y^{n+1} - y^n|$$
$$\leqslant \frac{1}{4} |y^{n+1} - y^n|^2 + 4k^2 c_3^2 (s_1 \bar{s}_1)^{-1} |u^n|^2$$
$$\times \| y^n \|^2$$

其中 $s_1 = s_1(h)$, $\bar{s}_1 = \bar{s}_1(h)$.

类似地有

$$2k|b(y^n,z^n,y^{n+1}-y^n)|\leqslant\frac{1}{4}|y^{n+1}-y^n|^2+4k^2c_3^2(\bar{s}_1)^{-2}$$
$$\times|y^n|^2\|z^n\|^2$$
$$2k|b(y^n,y^n,z^{n+1}-z^n)|\leqslant\frac{1}{2}|z^{n+1}-z^n|^2+2k^2c_3^2(s_1\bar{s}_1)^{-1}$$
$$\times|y^n|^2\|y^n\|^2$$

结合这些不等式,我们得到

$$\begin{aligned}&(|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2)-(|y^n|^2+|z^n|^2)+\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2\\&+\frac{1}{2}|z^{n+1}-z^n|^2+kc_5\|u^{n+1}\|^2\\&\leqslant kc_5^{-1}c_1^{-2}|f^n|^2+4k^2c_3^2(s_1\bar{s}_1)^{-1}|u^n|^2\|y^n\|^2\\&+4k^2c_3^2(\bar{s}_1)^{-2}|y^n|^2\|z^n\|^2\\&+2k^2c_3^2(s_1\bar{s}_1)^{-1}|y^n|^2\|y^n\|^2\end{aligned}\tag{2.31}$$

利用(2.14)且记 $\delta=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$,则

$$\begin{aligned}\|y_h+z_h\|_h^2&=\|y_h\|_h^2+\|z_h\|_h^2+2((y_h,z_h))_h\\&\geqslant\|y_h\|_h^2+\|z_h\|_h^2-2(1-\delta)\|y_h\|\|z_h\|\\&\geqslant\delta(\|y_h\|_h^2+\|z_h\|_h^2)\end{aligned}\tag{2.32}$$

又

$$|u_h|_h^2=|y_h+z_h|^2\leqslant 2(|y_h|_h^2+|z_h|_h^2)$$

从(2.31)得到

$$\begin{aligned}&(|y^{n+1}|^2+|z^{n+1}|^2)-(|y^n|^2+|z^n|^2)+\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2\\&+\frac{1}{2}|z^{n+1}-z^n|^2+kc_5\delta(\|y^{n+1}\|^2+\|z^{n+1}\|^2)\\&\leqslant\frac{kc_1^2}{c_5}|f^n|^2+k\Lambda(|y^n|^2+|z^n|^2)(\|y^n\|^2+\|z^n\|^2)\end{aligned}\tag{2.33}$$

其中

$$\Lambda = 2kc_3^2(9(s_1\,\bar{s}_1)^{-1} + 2(\bar{s}_1)^{-2}) \qquad (2.34)$$

我们现在可以给出稳定性条件,有

引理 2.4 我们设

$$k \leqslant 2c_1^2/c_5\delta \qquad (2.35)$$

$$\Lambda = 2kc_3^2(9(s_1(h)\,\bar{s}_1(h))^{-1} + 2(\bar{s}_1(h))^{-2}) \leqslant c_5\delta/2M \qquad (2.36)$$

其中

$$\bar{M} = \left(1 + \frac{1}{2}kc_5 s_1(h)^{-2}\right)(|y_h^0|_h^2 + |z_h^0|_h^2)$$

$$M = \bar{M} + \frac{4c_1^4}{c_5^2\delta}|f|^2_{L^\infty(R_+;V_h,|\cdot|_h)} \qquad (2.37)$$

则对每个 $n \geqslant 0$,

$$\mu_n = |y_h^n|_h^2 + |z_h^n|_h^2 \leqslant M \qquad (2.38)$$

证明 用归纳法证明,当 $n=0$ 时,上式显然成立.设一直到 n 阶(2.38)成立,我们对 $n+1$ 阶进行估计.注意到归纳假设和(2.26)~(2.28),有 $\Lambda M \leqslant \frac{1}{2}c_5\delta$,令

$$\xi^n = |y^n|^2 + |z^n|^2 + \frac{1}{2}kc_5\delta(\|y^n\|^2 + \|z^n\|^2) \qquad (2.39)$$

从(2.33)推得

$$\xi^{n+1} - \xi^n + \frac{1}{2}kc_5\delta(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2) \leqslant \frac{kc_1^2}{c_5}|f|^2_{L^\infty} \qquad (2.40)$$

其中

$$|f|^2_{L^\infty} = |f_h|^2_{L^\infty(R_+;V_h,|\cdot|_h)}$$

由(2.1),有

$$\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2$$
$$\geqslant \frac{1}{2c_1^2}(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2) + \frac{1}{2}(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2)$$

$$\geqslant \frac{1}{2c_1^2}\xi^{n+1} \quad (\text{利用}(2.35))$$

代入(2.40)得到

$$\left(1+\frac{kc_5\delta}{4c_1^2}\right)\xi^{n+1} \leqslant \xi^n + \frac{kc_1^2}{c_5}|f|_{L^\infty}^2$$

$$\therefore \xi^{n+1} \leqslant \left(1+\frac{kc_5\delta}{4c_1^2}\right)^{-1}\xi^n + \frac{kc_1^2}{c_5}\left(1+\frac{kc_5\delta}{4c_1^2}\right)^{-1}|f|_{L^\infty}^2 \quad (2.41)$$

(2.41)对 $n=1,2,\cdots,n$ 也成立，于是令 $n=1,2,\cdots,n$ 然后相加得到

$$\xi^{n+1} \leqslant \left(1+\frac{kc_5\delta}{4c_1^2}\right)^{-n-1}\xi^0 + \frac{4c_1^4}{c_5^2\delta}|f|_{L^\infty}^2 \quad (2.42)$$

$$\xi^{n+1} \leqslant \xi^0 + \frac{4c_1^4}{c_5^2\delta}|f|_{L^\infty}^2 \quad (2.43)$$

特别，

$$|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2 \leqslant |y^0|^2 + |z^0|^2 + \frac{1}{2}kc_5\delta(\|y^0\|^2 + \|z^0\|^2) + \frac{4c_1^4}{c_5^2\delta}|f|_{L^\infty}^2$$

$$\leqslant \left(1+\frac{1}{2}kc_5\delta s_1^{-2}\right)(|y^0|^2 + |z^0|^2) + \frac{4c_1^4}{c_5^2\delta}|f|_{L^\infty}^2$$

$$= M$$

引理证毕.

为研究在 $k\to 0, h\to 0$ 时的收敛性，(2.37)，(2.38)的有界性将因 $ks_1(h)^{-2}$ 的保持有界性而发挥其作用，条件(2.36)需要 $\Lambda=\Lambda(k,h)$ 必须比某特殊常数更小一些. 我们将 y_h^n, z_h^n 和 u_h^n 与以如下方式定义的阶梯函数联系起来：

$$y_h: R_+ \to V_{h_1}, \quad y_h(t) = y_h^n, \quad t\in[nk,(n+1)k)$$

$$z_h: R_+ \to W_h, \quad z_h(t) = z_h^n, \quad t\in[nk,(n+1)k)$$

$$u_h: R_+ \to V_{h_2}, \quad u_h(t) = y_n(t) + z_n(t)$$

引理 2.4 可以理解为：

在假设(2.35)～(2.37)下，

$$|y_n|^2_{L^\infty(R_+; V_h, |\cdot|_h)} + |z_h|^2_{L^\infty(R_+; V_h, |\cdot|_h)} \leqslant M \quad (2.44)$$

及由于 $ks_1(h)^{-2}$保持有界，

u_h, y_h, z_h 当 k 和 $h \to 0$ 时在 $L^\infty(R_+; V_h, |\cdot|_h)$中保持有界. (2.45)

在同样假设条件下可以进一步估计 y_h, z_h, u_h：固定 $T>0$，令 $Nk \leqslant T < (N+1)k$，且对 $n=0,\cdots,N$ 相加(2.40)得到

$$\xi^{N+1} + \frac{1}{2}kc_5\delta\sum_{n=0}^{N}(\|y^{n+1}\|^2 + \|z^{n+1}\|^2)$$

$$\leqslant \xi^0 + \frac{kNc_1^2}{c_5}|f|^2_{L^\infty}$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{2}kc_5\delta s_1^{-2}\right)(|y_h^0|^2 + |z_h^0|^2) + \frac{Tc_1^2}{c_5}|f|^2_{L^\infty}$$

$$\leqslant \bar{M} + \frac{Tc_1^2}{c_5}|f|^2_{L^\infty}$$

因此在假设(2.35)～(2.37)之下，

$$|y_h|^2_{L^2(0,T; V_h, \|\cdot\|_h)} + |z_h|^2_{L^2(0,T; V_h, \|\cdot\|_h)} \leqslant M'$$

$$M' = \frac{2}{c_5\delta}\left(\bar{M} + \frac{Tc_1^2}{c_5}|f|^2_{L^\infty(R_+, V_h, |\cdot|_h)}\right) \quad (2.46)$$

或者，由于 $ks_1(h)^{-2}$有界，有

u_h, y_h, z_h 对任何 $T>0$，当 k 和 $h \to 0$ 时在 $L^2(0, T; V_h, \|\cdot\|_h)$中保持有界.

由于

$$|z_h|_{L^2(0,T; V_h, |\cdot|_h)} \leqslant s_2(h)|z_h|_{L^2(0,T; V_h, \|\cdot\|_h)} \leqslant cs_2(h)$$

(2.47)

而 $h \to 0$ 时，$s_2(h) \to 0$，从而

$$|z_h|_{L^2(0,T;V_h,|\cdot|_h)} \to 0, \quad (\text{当 } k \to 0, h \to 0), \quad \forall T > 0 \tag{2.48}$$

继而可得到$\{y_h^n\}$在 $k \to 0, h \to 0$ 条件下的收敛性($n \to \infty$).

§3 Galerkin 有限元逼近

本节我们研究非线性发展方程的 Galerkin 有限元逼近方法.

我们研究如下问题：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu A u + R(u) = 0 \tag{3.1}$$

其中

$$R(u) = B(u) + Cu - f \tag{3.2}$$

$A, B(\cdot), C$ 同本章第 1 节所设，$\nu A + C$ 满足正算子假设(1.5)，给定初始条件

$$u(0) = u_0 \tag{3.3}$$

下面的结果是已知的：

如果 $u_0 \in H$，则(3.1)，(3.3)有唯一整体解 $u(t)$：

$$u \in C(R_+; H) \cap L^2(0,T;V), \quad \forall T > 0$$

如果 $u_0 \in V$，则 $u \in C(R_+;V) \cap L^2(0,T;D(A))$，$\forall T > 0$.

如同第 2 节那样，我们考虑 V 的有限维子空间 V_h，(3.1)～(3.3)的通常的 Galerkin 逼近是定义一个函数 $\hat{u}_h: R_+ \to V_h$，使得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{u}_h, v_h) + a(\hat{u}_h, v_h) + b(\hat{u}_h, \hat{u}_h, v_h) + (c\hat{u}_h, v_h)$$

$$= (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall t > 0 \tag{3.4}$$

$$(\hat{u}_h(0), v_h) = (u_0, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{3.5}$$

其中

$$a(u,v) = \nu((u,v)), \quad \forall u, v \in V$$

我们给定 $V_{2h} \subset V_h$，记 W_h 是 V_{2h} 在 V_h 中的补，于是

$$V_h = V_{2h} \oplus W_h \tag{3.6}$$

视 V_{2h} 是 V_h 相应的三角剖分的一个子分割(有限元逼近)，当取极限 $h \to 0$ 时，我们将研究三族空间 V_h, V_{2h} 和 W_h 且加强条件：

$$\bigcup_h V_{2h} \text{ 在 } V \text{ 中稠密} \tag{3.7}$$

由(3.6)推知

$$\bigcup_h V_h \text{ 在 } V \text{ 中稠密} \tag{3.8}$$

如同第 2 节，我们需要加强的 Schwarz 不等式：

$$|((y_h, z_h))| \leqslant (1-\delta) \| y_h \| \| z_h \|, \quad \forall y_h \in V_{2h}, z_h \in W_h \tag{3.9}$$

其中 $0<\delta<1$ 与 h 无关.

$$|z_h| \leqslant s_1(h) \| z_h \|, \quad \forall z_h \in W_h \tag{3.10}$$

且当 $h \to 0$ 时，$s_1(h) \to 0$.

取 $h = 1/2m, m \in N$，如同第 2 节那样构造 V_h, V_{2h} 和 W_h 空间，则(3.6)～(3.10)成立，而且有

$$((y_h, z_h)) = 0, \quad \forall y_h \in V_{2h}, \quad z_h \in W_h$$

$$|z_h|^2 \leqslant \lambda_{m+1}^{-1} \| z_h \|^2 = \lambda_{m+1}^{-1}(Az_h, z_h), \quad \forall z_h \in W_h$$

固定 h，研究如下逼近：

$$u_h(t) = y_h(t) + z_h(t), y_h(t) \in V_{2h}, z_h(t) \in W_h, \forall t > 0 \tag{3.11}$$

y_h, z_h 由下面的方程确定：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_h, \hat{y}_h) &+ a(y_h + z_h, \hat{y}_h) + b(y_h, y_h, \hat{y}_h) \\ &+ b(y_h, z_h, \hat{y}_h) + b(z_h, y_h, \hat{y}_h) \\ &+ (Cy_h + Cz_h, \hat{y}_h) = (f, \hat{y}_h), \quad \forall \hat{y}_h \in V_{2h} \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$a(y_h + z_h, \hat{z}_h) + b(y_h, y_h, \hat{z}_h)$$

$$+(Cy_h+\hat{z}_h)=(f,\hat{z}_h),\quad \forall z_h\in W_h \tag{3.13}$$

$$(y_h(0),\hat{y}_h)=(u_0,\hat{y}_h),\quad \forall y_h\in V_{2h} \tag{3.14}$$

对每个 t，可将(3.13)改写为 z_h 的线性方程：

$$a(z_h(t),\hat{z}_h)=-a(y_h(t),\hat{z}_h)-b(y_h(t),y_h(t),\hat{z}_h)$$
$$-(Cy_h(t),\hat{z}_h)+(f,\hat{z}_h),\quad \forall \hat{z}_h\in W_h \tag{3.13'}$$

利用 Lax-Milgram 定理，$z_h(t)$ 可以表为 $y_h(t)$ 的二次函数，再代入(3.12)，这样(3.12)，(3.14)就变成带有 $z_h=z_h(y_h)$ 的具有解 $u_{2h}=y_h$ 在 V_{2h} 空间上一种修正的 Galerkin 方法，从而也就变为常微分方程 Cauchy 问题. 在 $(0,T_h)$ 上解 $y_h(t)$(从而 $z_h(t)$)的存在唯一性可利用相应定理解决.

我们在有限元空间上构造(3.6)，为简单起见仅限于某些简单的有限元.

一维情形：

$\Omega=(0,1)$，$V=H_0^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，$h=\dfrac{1}{2N}$，$N\in\mathcal{N}$，V_h 为在 0 和 1 取零值的连续分段线性函数空间，$\varphi_h\subset V_h$ 是在每个区间 $[jh,(j+1)h]$ 上的线性函数，$V_{2h}\subset V_h$ 是 $[2jh,2(j+1)h]$ 上线性的函数空间. $j=0,\cdots,N-1$.

节函数 $\varphi_{j,2h}$：{V_{2h} 中在第 $2jh$ 个节点为 1 而在其余 $2kh(k\neq j)$ 节点为零的函数}. $j=1,\cdots,N-1$，组成 V_{2h} 的一个基. 类似地节函数 $\psi_{j,h}$：{V_h 中在第 $(2j+1)h$ 节点为 1，其余 $(2k+1)h$ $(k\neq j)$ 节点为零的函数}，$j=0,\cdots,N-1$，组成 W_h 的一个基(图 3.1)，V_{2h} 和 W_h 的基的并组成 V_h 的一个非典则基，称为 V_h 的谱系基或 V_h 的诱导基. 性质(3.7)涉及取极限 $h\to 0(N\to\infty)$，证明是初等的. 因此我们必须验证(3.9)和(3.10).

设 $a(y,z)=((y,z))=\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$，易见(经过简单计算)

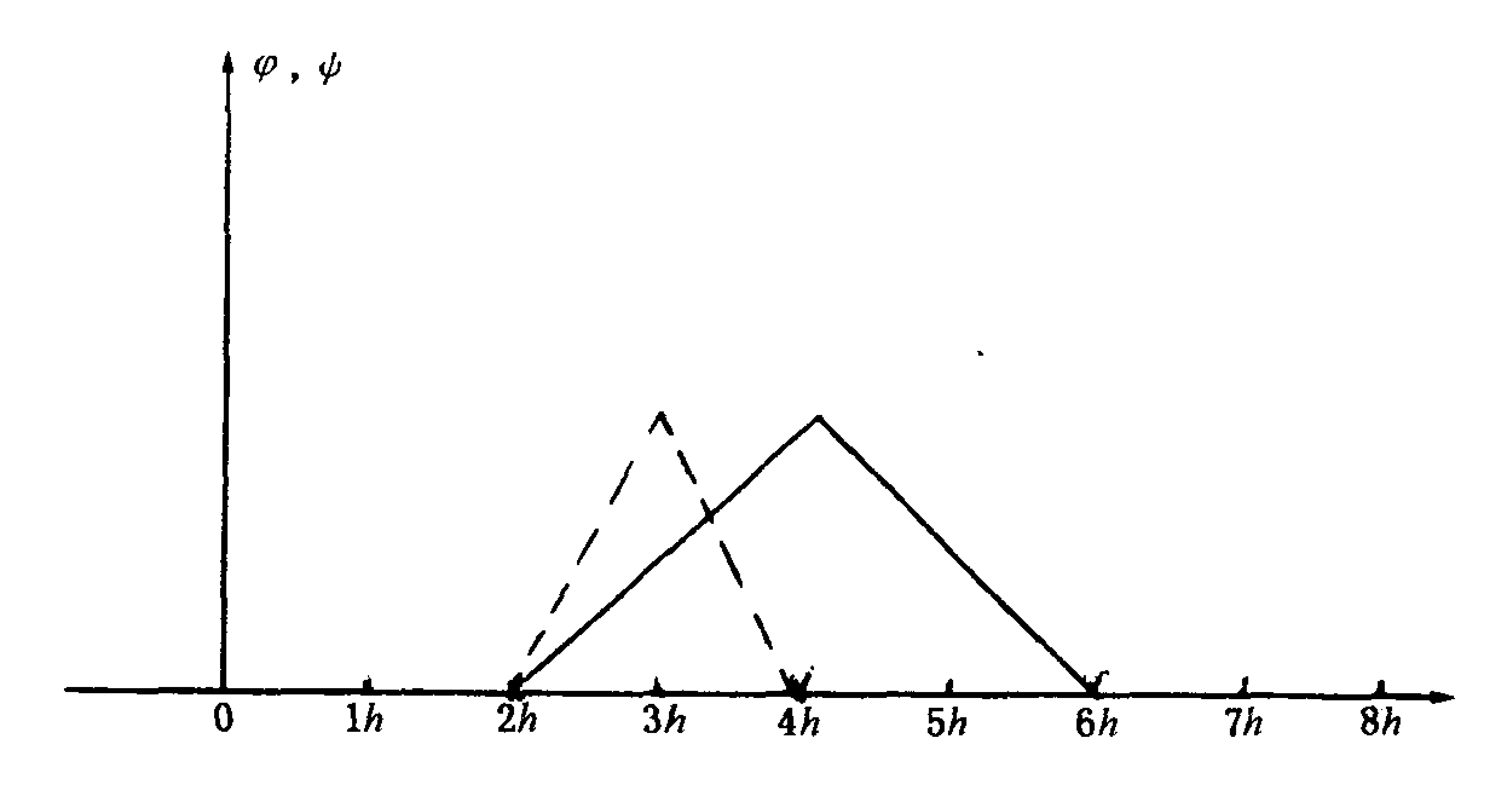


图 3.1 $\varphi_{j2h,j=2}$（实线）和 $\psi_{jh,j=1}$（虚线）的图形

$$a(y_h, z_h) = 0, \quad \forall y_h \in V_{2h}, \quad \forall z_h \in W_h \tag{3.15}$$

因此(3.9)取 $\delta = 1$ 时成立(在谱情形)，在高维空间不再为零. 为验证(3.15)，仅须计算

$$\int_0^1 \varphi'_{j,2h}(x)\psi'_{k,h}(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall j, k$$

这是很初等的计算.

最后我们验证(3.10)，在空间维数为 1 的情形，由于 W_h 的基 ψ_{jh} 的支集不交，故在 $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 中 ψ_{jh} 正交，因此，如果

$$z_h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} z_h((2j+1)h)\psi_{jh}(x)$$

则

$$|z_h|^2 = \int_0^1 |z_h(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \{z_h((2j+1)h)\}^2 \int_{2jh}^{2(j+1)h} \{\psi_{jh}(x)\}^2 \mathrm{d}x$$

$$\| z_h \|^2 = \int_0^1 | z'_{h(x)} |^2 \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \{z_h((2j+1)h)\}^2 \int_{2jh}^{2(j+1)h} \{\psi'_{jh}(x)\}^2 \mathrm{d}x$$

因此仅须对 ψ_{jh} 证明(3.10)，我们有

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} \{\psi_{jh}(x)\}^2 \mathrm{d}x = \frac{2h}{3}$$

$$\int_{2jh}^{2(j+1)h} \{\psi_{jh}'(x)\}^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{h}$$

取 $s_1(h)=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$,就得到(3.10).

二维情形:$\mathscr{P}_1$ 一元

$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是有界开集,$V=H_0^1(\Omega)$,给定 Ω 的一个可容许三角剖分 $\mathscr{T}_{2h}$和加细三角剖分 $\mathscr{T}_h$:将每个 $T\in\mathscr{T}_{2h}$分为 4 个相似三角形(图 3.2),自然,这里 $4=2^2$ 可用 d^2 取代.

用 $V_h(V_{2h})$表示映 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的连续分片线性函数空间,这些函数在每个 $T\in\mathscr{T}_h(T\in\mathscr{T}_{2h})$上是线性的而在其外部由三角形所覆盖的 Ω_h 上为零.

$$\Omega_h = \bigcup_{T\in\mathscr{T}_h} T = \bigcup_{T\in\mathscr{T}_{2h}} T$$

自然有

$$V_{2h}\subset V_h\subset V = H_0^1(\Omega)$$

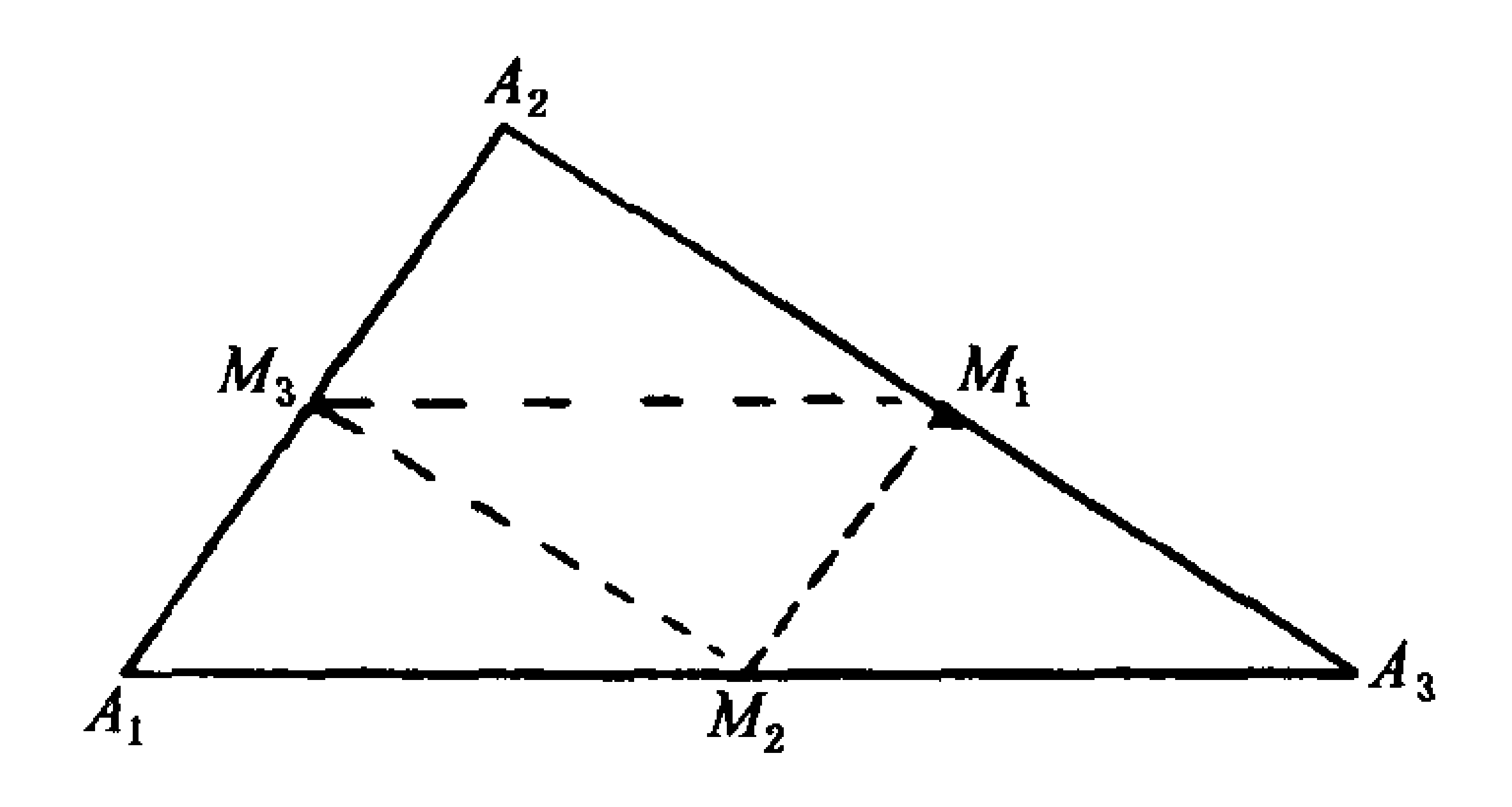


图 3.2　一个三角形 T 剖分为 2^2 个三角形

我们让 ε_h 表示三角形 $T\in\mathscr{T}_h$ 的顶点集,$\mathring{\varepsilon}_h$ 是由内结点构成的ε_h 的子集

$$\mathring{\varepsilon}_h = \varepsilon_h \setminus (\varepsilon_h \cap \partial\Omega_h)$$

类似地定义ε_{2h},$\mathring{\varepsilon}_{2h}$,函数$W_{hM}$:$\{W_{hM}\in V_h, M\in\mathring{\varepsilon}_h, W_{hM}(M)=$

1 而 $W_{hM}(P)=0, \forall P\in \varepsilon_h, P\neq M\}$ 组成 V_h 的典则基，V_{2h} 的典则基类似地定义. W_h 空间由 $\psi_{hM}\in V_h$ 所张成：$\{\psi_{hM}\in V_h, M\in \mathring{\varepsilon}_h \setminus \mathring{\varepsilon}_{2h}, \psi_{hM}(M)=1$ 而 $\psi_{hM}(P)=0, \forall P\in \varepsilon_h, P\neq M\}$，而这些函数构成了 W_h 的一个基. V_{2h} 和 W_h 的并提供了 V_h 的一个不同于结点基的基，因其是由 V_{2h} 诱导而成的，称其为谱系基，有时我们可利用诱导基的表达式. 对于 $u_n\in V_h$，对应的分解是：

$$u_h = y_h + z_h, \quad y_h \in V_{2h}, \quad z_h \in W_h$$

其中 y_h, z_h 由下列条件唯一确定：

$$\begin{aligned} y_h(M) &= u_h(M), \quad \forall M \in \mathring{\varepsilon}_{2h} \\ z_h(M) &= 0, \quad \forall M \in \mathring{\varepsilon}_{2h} \\ z_h(M) &= u_h(M), \quad \forall M \in \mathring{\varepsilon}_h \setminus \mathring{\varepsilon}_{2h} \end{aligned} \tag{3.16}$$

当取极限 $h\to 0$ 时，我们研究三角剖分族对 $\mathscr{T}_h, \mathscr{T}_{2h}$，且假设一个通常性条件：

$$\frac{\rho_T}{\rho_T'} \leqslant K, \quad \forall T \in \mathscr{T}_h (\text{和 } \mathscr{T}_{2h}) \tag{3.17}$$

其中

$$\rho_T = \mathrm{diam}(T)$$

$$\rho_T' = \mathrm{Sup}\{\mathrm{diam}(S), S \text{ 是包含在 } T \text{ 中的球}\}$$

这个条件等价于，对每一个 θ，

$$|\cos\theta| \leqslant 1 - \eta, \quad 0 < \eta < 1 \tag{3.17'}$$

这表明角度不趋于零.

(3.7)的证明是初等的，我们证明(3.9)和(3.10).

令

$$((y, z)) = \int_\Omega \nabla y(x) \cdot \nabla z(x) \mathrm{d}x$$

而$(\cdot,\cdot)$是 $L^2(\Omega)$标量积 $(y,z) = \int_\Omega y(x)z(x)\mathrm{d}x$，只须在 $\mathscr{T}_{2h}$ 的一个三角形中证明(3.9)和(3.10). 我们研究图 3.2 中的三角形 $T\in\mathscr{T}_{2h}$ 且利用与 M_1, M_2, M_3 相关的重心坐标 $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$,

$\lambda_3(x)$. 如 $y \in V_{2h}, z \in W_h$,我们写为 $y(A_i)=y_i, z(M_i)=z_i$,而在 T 上,

$$y=\frac{1}{2}(y_2+y_3)\lambda_1+\frac{1}{2}(y_1+y_3)\lambda_2+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\lambda_3$$
$$=\frac{1}{2}(y_3-y_1)\lambda_1+\frac{1}{2}(y_3-y_2)\lambda_2+\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$
$$(\text{由于 } \lambda_3=1-\lambda_1-\lambda_2)$$

$$\nabla y=\frac{1}{2}(y_3-y_1)\nabla\lambda_1+\frac{1}{2}(y_3-y_2)\nabla\lambda_2$$

在每个子三角形上 z 有不同的表达式.

在 $M_1M_2M_3$ 上,

$$z=z_1\lambda_1+z_2\lambda_2+z_3\lambda_3$$
$$\nabla z=(z_1-z_3)\nabla\lambda_1+(z_2-z_3)\nabla\lambda_2$$

在 $A_1M_2M_3$ 上,

$$z=(z_2+z_3)\lambda_1+z_2\lambda_2+\lambda_3 z_3$$
$$\nabla z=z_2\nabla\lambda_1+(z_2-z_3)\nabla\lambda_2$$

在 $A_2M_1M_3$ 上,

$$z=z_1\lambda_1+(z_1+z_3)\lambda_2+z_3\lambda_3$$
$$\nabla z=(z_1-z_3)\nabla\lambda_1+z_1\nabla\lambda_2$$

在 $A_3M_1M_2$ 上,

$$z=z_1\lambda_1+z_2\lambda_2+(z_1+z_2)\lambda_3$$
$$\nabla z=-z_2\nabla\lambda_1-z_1\nabla\lambda_2$$

这里已利用 $z(A_i)=0$ 的事实. $i=1,2,3$.

引理 3.1 由于(3.17′),有

$$\frac{|\nabla\lambda_1\cdot\nabla\lambda_2|}{|\nabla\lambda_1||\nabla\lambda_2|}\leqslant 1-\eta \tag{3.18}$$

证明 在 R^2 中选取 T 使得 $A_1=(0,0), A_2=(b,0), A_3=(c,d)$,易算出 λ_1,λ_2,从而得到(3.18),注意(3.18)左边等于

$$|\cos A_1\widehat{A_3}A_2|\leqslant 1-\eta$$

证毕.

我们引入二次型:

$$\sigma(\alpha) = |\nabla\lambda_1|^2\alpha_1^2 + |\nabla\lambda_2|^2\alpha_2^2$$

$$K(\alpha) = \sigma(\alpha) + 2\nabla\lambda_1 \cdot \nabla\lambda_2\alpha_1\alpha_2, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$$

由(3.18),有

$$\eta\sigma(\alpha) \leqslant K(\alpha) \leqslant (2-\eta)\sigma(\alpha) \tag{3.19}$$

直接计算得到

$$\int_T |\nabla y|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{meas}T K(y_3 - y_1, y_3 - y_2)$$

$$\int_T |\nabla z|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{meas}T\{K(z_1 - z_3, z_2 - z_3) + K(z_2, z_2 - z_3) + K(z_1 - z_3, z_1) + K(-z_1, -z_2)\}$$

$$\int_T \nabla y \cdot \nabla z \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{meas}T\widetilde{K}((y_3 - y_1, y_3 - y_2), (z_1 - z_3, z_2 - z_3))$$

其中 $\widetilde{K}$ 是与K 相伴的对称双线性型. 对 $\widetilde{K}$ 利用 Schwartz 不等式,有

$$\left|\int_T \nabla y \cdot \nabla z \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(\mathrm{meas}\ T)^{\frac{1}{2}}}{2} \left(\int_T |\nabla y|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \{K(z_1 - z_3, z_2 - z_3)\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

利用(3.19)的第一,二个不等式,得到

$$\int_T |\nabla z|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{2-\eta} \cdot \frac{\mathrm{meas}\ T}{2} K(z_1 - z_3, z_2 - z_3) \tag{3.21}$$

结合(3.20),(3.21),有

$$\left|\int_T \nabla y \cdot \nabla z \mathrm{d}x\right| \leqslant \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T |\nabla y|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T |\nabla z|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

对 $T\in\mathcal{T}_h$ 求和,得到(3.9),其中

$$1-\delta=\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

对于(3.10),将 T 映在一个基准三角形上,利用 $z(A_i)=0, i=1,$ 2,3,就可得到

$$\begin{aligned}\int_T z^2\mathrm{d}x &\leqslant c\rho_T^2\int_T|\nabla z|^2\mathrm{d}x\\ \int_\Omega z^2\mathrm{d}x &\leqslant c\rho_n^2\int_\Omega|\nabla z|^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.24}$$

从而

$$s_1(h)=c\rho_h \tag{3.25}$$

我们有

引理 3.2 设 $P=P(T)$ 和 $Q=Q(T)$ 是定义在三角形 $T\in\mathbb{R}^2$ 上两个有限维函数空间,又设 P 和 Q 在可逆的仿射映射下是不变* 的,且

$$P(T)\supset\mathbb{R}$$

$$P(T)\cap Q(T)=\{0\}$$

我们研究满足如下一般性条件的三角形族 T:

$$\frac{\rho_T}{\rho_T'}\leqslant K,\quad\forall T \tag{3.26}$$

则存在常数 $\gamma; 0<\gamma<1, \gamma$ 仅与 P 和 Q 族有关而与 T 无关,使得加强的 Cauchy-Schwarz 不等式成立:

$$\begin{gathered}\left|\int_T\nabla y\cdot\nabla z\mathrm{d}x\right|\leqslant\gamma\left(\int_T|\nabla y|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_T|\nabla z|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \forall y\in P(T),\forall z\in Q(T),\forall T\end{gathered} \tag{3.27}$$

证明 对任意三角形 T,记

$$\gamma(T)=\sup\int_T\nabla y\cdot\nabla z\mathrm{d}x$$

---

* 对任何可逆仿射映射 F,有 $P(FT)=P(T)\circ F^{-1}, Q(FT)=Q(T)\circ F^{-1}$

其中上确界是对满足

$$|\nabla y|_{L^2(T)} = 1, \quad |\nabla z|_{L^2(T)} = 1$$

的 $y \in P(T), z \in Q(T)$取的，于是(3.27)等价于

$$\gamma = \sup_T \gamma(T) < 1$$

其中上确界对给定的三角形族 T 取. 由于这个族未必紧，我们首先仅限于紧的情形. 事实上如果 F 是等距的或者是可逆的相似扩大，我们有 $\gamma(FT) = \gamma(T)$，因此利用(3.26)易验证有

$$\gamma \leqslant \widetilde{\gamma} = \sup_{T \in \mathscr{T}}^2 \gamma(T) \tag{3.28}$$

其中$\mathscr{T}$是 $\rho_T \leqslant K$ 且单位球是含在T 内最大球的紧的三角形集合. (特别这意味着 $\rho'_T = 1$.)

其次我们目的在于证明上确界 $\widetilde{\gamma}$ 对某些$T, y \in P(T), z \in Q(T)$能够达到. 令$\hat{T}$是一固定基准三角形. 对$\mathscr{T}$中任意 T，令 F 是一可逆仿射映射：

$$F(x) = Bx + b$$

映$\hat{T}$到 T 上，则

$$\widetilde{\gamma} = \sup_T \sup_{\hat{y}, \hat{z}} \int_{\hat{T}} B^{-T}\nabla \hat{y} \cdot B^{-T}\nabla \hat{z} \ |\det B| \, d\hat{x} \tag{3.29}$$

其中上确界是对 $T \in \mathscr{T}, \hat{y} = y \circ F^{-1} \in P(\hat{T}), \hat{z} = z \circ F^{-1} \in Q(\hat{T})$ 取的，且满足：

$$\begin{aligned} \int_T |\nabla y|^2 dx &= \int_{\hat{T}} |B^{-T}\nabla \hat{y}|^2 |\det B| \, d\hat{x} = 1 \\ \int_T |\nabla z|^2 dx &= \int_{\hat{T}} |B^{-T}\nabla \hat{z}|^2 |\det B| \, d\hat{x} = 1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

由关于$\|B\|$和$|\det B|$的经典不等式，有

$$\|B\| \leqslant \frac{\rho_T}{\rho'_{\hat{T}}}, |\det B^{-1}| \leqslant \frac{\rho_{\hat{T}}}{\rho'_T}$$

因此，条件(3.30)推出

$$\int_{\hat{T}} |\nabla \hat{y}|^2 d\hat{x} = \int_T |B^T \nabla y|^2 |\det B^{-1}| dx$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho_{\hat{T}}}{\rho'_{\hat{T}}} \quad \frac{\rho_T}{\rho'_T}\right)^2 \int_T |\nabla y|^2 dx$$

$$\leqslant \left(\frac{\rho_{\hat{T}}}{\rho'_{\hat{T}}} \quad \frac{\rho_T}{\rho'_T}\right)^2$$

由$\mathscr{T}$的定义，$\rho_T/\rho'_T \leqslant K$，这就给出关于$|\nabla \hat{y}|_{L^2(\hat{T})}$，$|\nabla \hat{z}|_{L^2(\hat{T})}$的界：

$$|\nabla \hat{y}|_{L^2(\hat{T})}, |\nabla \hat{z}|_{L^2(\hat{T})} \leqslant K \frac{\rho_{\hat{T}}}{\rho'_{\hat{T}}}$$

这就推出在(3.29)中的上确界在$\mathscr{T} \times P(\hat{T})/\mathbb{R} \times Q(\hat{T})$的一紧子集上取，因而可以达到. 等价地说，我们已得到，对某 $T \in \mathscr{T}$, $y \in P(T)$, $z \in Q(T)$，有

$$\tilde{\gamma} = \int_T \nabla y \cdot \nabla z dx \tag{3.31}$$

下面我们证明 $0 < \tilde{\gamma} < 1$(因而 $0 < \gamma < 1$). 采用反证法，如果 $\tilde{\gamma} = 1$，则由(3.31)，存在 $y \in P(T)$, $z \in Q(T)$，使得

$$\int_T \nabla y \cdot \nabla z dx = |\nabla y|_{L^2(T)} = |\nabla z|_{L^2(T)} = 1 \tag{3.32}$$

这在通常的 Gauchy-Schwarz 不等式中是等式情形，而这需要

$$\nabla y = K \nabla z, \quad y - c = Kz$$

对某个 $K, c \in \mathbb{R}$. 由于 $P(T) \cap Q(T) = \{0\}$，所以 $y = c$ 和 $z = 0$，这与(3.32)矛盾，引理 3.2 获证.

有了以上准备，我们可以证明本节主要定理.

定理 3.3 设方程(3.1)中 A, B, C 同 §1 所设且(3.6)～(3.10)成立，$u_0 \in H$. 则对每一固定 h，(3.12)～(3.14)的解 $u_h = y_h + z_h$ 对所有 $t > 0$ 存在且唯一确定. 当 $h \to 0$ 时，u_h 在如下意义下收敛到(3.1)，(3.3)的解 u：

对所有 $T>0, u_h \to u$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中强收敛；

$y_h \to u$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$ 中弱 * 收敛，在 $L^p(0,T;H)$ 中强收敛，在 $L^2(0,T;V)$ 中弱收敛，$\forall T>0$ 和所有 $p: 1 \leqslant p < \infty$；$z_h \to 0$ 在 $L^2(0,T;H)$ 中强收敛且在 $L^2(0,T;V)$ 中弱收敛.

证明 先验估计：

在(3.12)中取 $\tilde{y}_h = y_h$，在(3.13)中取 $\tilde{z}_h = z_h$，利用假设，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_h|^2 + a(y_h+z_h, y_h) + b(y_h, z_h, y_h) + (C(y_h+z_h), y_h) = (f, y_h) \tag{3.33}$$

$$a(y_h+z_h, z_h) + b(y_h, y_h, z_h) + (C(y_h+z_h), z_h) = (f, z_h) \tag{3.34}$$

两式相加，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_h|^2 + a(u_h, u_h) + (Cu_h, u_h) = (f, u_h) \tag{3.35}$$

利用关于算子 A, C 的假设，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_h|^2 + \alpha\|u_h\|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_1\alpha}|f|^2 \tag{3.36}$$

利用(3.9)可以改进(3.36)，事实上，

$$\begin{aligned}\|u_h\|^2 &= \|y_h\|^2 + \|z_h\|^2 + 2((y_h, z_h)) \\ &\geqslant \|y_h\|^2 + \|z_h\|^2 - 2(1-\delta)\|y_h\|\,\|z_h\| \\ &\geqslant \delta(\|y_h\|^2 + \|z_h\|^2)\end{aligned} \tag{3.36'}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_h|^2 + \alpha\delta(\|y_h\|^2 + \|z_h\|^2) \leqslant \frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2 \tag{3.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|y_h|^2 + \alpha\delta\lambda_1|y_h|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha\lambda_1}|f|^2 \tag{3.38}$$

从(3.38)推得 $|y_h(t)|$ 关于 t 一致有界，即 $T_h = +\infty$，又得到：

当 $h \to 0$ 时，y_h 族是 $L^\infty(R_+;H)$ 中有界集 (3.39)

返回到(3.36)知

对所有 $T>0, y_h, z_h$(从而 u_h)当 $h\to 0$ 时,是 $L^2(0,T;V)$中有界集 (3.40)

利用(3.10)知:

对所有 $T>0, \{s_1(h)^{-1}z_h\}$当 $h\to 0$ 时是 $L^2(0,T;H)$中有界集 (3.41)

取极限:

从(3.41)和(3.10)及紧致性定理推得:

$z_h\to 0$ 在 $L^2(0,T;H)$中强收敛($h\to 0$);对所有 $T>0$,当 $h\to 0$ 时,y_h 是$L^2(0,T;H)$中紧集(在本节最后给出证明),存在 $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)\cap L^2(0,T;V)$, $\forall T>0$,有子列$\{y_h\},\{z_h\}$:

$y_h\to u$:在 $L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$中弱 *,在 $L^2(0,T;H)$中强,在 $L^2(0,T;V)$中弱;而 $z_h\to 0$,在 $L^2(0,T;H)$中强,在 $L^2(0,T;V)$中弱.

我们可在(3.12)~(3.14)中取极限,得到 u 是(3.1),(3.3)的解,且由唯一性得到对序列$\{y_h\},\{z_h\}$的收敛性.

最后利用本章§1 同样方法,考虑

$$Z_h=\frac{1}{2}|y_h(T)-u(T)|^2$$
$$+\int_0^T\{a(u_h-u,u_h-u)+(C(u_h-u),u_h-u)\}\mathrm{d}t$$

利用(3.35)可得到当 $h\to 0$ 时,$Z_h\to 0$,从而有:在 H 中$y_h(T)$强收敛到 $u(T)$,u_h 在$L^2(0,T;V)$中强收敛到 u.

利用有限元,我们可以改进上述收敛性.

对于 $\mathscr{P}_1$ 二维情形,这里假设三角剖分 $\mathscr{T}_h$ 满足

$$\frac{\rho_h}{\rho_T}\leqslant\delta,\qquad \forall T,\forall h \tag{3.42}$$

我们首先推导 z_h 在$L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$中的先验估计.由(3.34),有

$$a(z_h,z_h)+(Cz_h,z_h)$$
$$=-a(y_h,z_h)-b(y_h,y_h,z_h)-(Cy_h,z_h)+(f,z_h)$$

$$\alpha\|z_h\|^2\leqslant\nu\|y_h\|\|z_h\|+c_1|y_h|\|y_h\|\|z_h\|$$

$$+ c_2 \| y_h \| \, \| z_h \| + |f| \, |z_h|$$

$$\leqslant (\nu + c_1 |y_h| + c_2 s_1(h)) \| y_h \| \, \| z_h \|$$

$$+ s_1(h) |f| \, \| z_h \|$$

上式已利用(3.10),再次利用(3.10),得到

$$|z_h| \leqslant \frac{s_1(h)}{\alpha}(\nu + c_1 |y_h|$$

$$+ c_2 s_1(h)) \| y_h \| + \frac{1}{2}(s_1(h))^2 |f| \quad (3.43)$$

对于有限元,$s_1(h) = c\rho_h$,又 V_h 上 V 范和 H 范是等价的. 在 $\mathscr{P}_1$ 情形,利用基准元和(3.42),有

$$\| \varphi_h \| \leqslant c' \rho_h^{-1} |\varphi_h|, \quad \forall \varphi_h \in V_{2h}$$

其中 c' 与 h 无关,于是

$$|z_h| \leqslant \frac{cc'}{\alpha}(\nu + c_1 |y_h| + c\rho_h) |y_h| + c\rho_h^2 |f| \quad (3.44)$$

利用 y_h 当 $h \to 0$ 时在 $L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ 中一致有界性推出:

$$\text{当 } h \to 0 \text{ 时}, z_h \text{ 族在 } L^\infty(\mathbb{R}_+; H) \text{ 中保持有界} \quad (3.45)$$

再由 $z_h \to 0 (h \to 0)$ 在 $L^2(0, T; H)$ 中强收敛推得:

$$z_h \to 0 \text{ 在 } L^p(0, T; H) \text{ 中强收敛}. \ \forall p, 1 \leqslant p < \infty, \forall T > 0 \quad (3.46\text{a})$$

我们利用 u 在 V_h 中的内插 $r_h u$,我们知道

$$r_h u \to u \text{ 在 } L^2(0, T; V) \text{ 中强收敛} (h \to 0)$$

由于 $u_h \to u$ 在 $L^2(0, T; V)$ 中强收敛,从而

$$\int_0^T \| u_h - r_h u \|^2 \mathrm{d}t \to 0 \qquad \text{当 } h \to 0 \text{ 时}$$

分解 $r_h u = \tilde{y}_h + \tilde{z}_h$,如同(3.36′),有

$$\delta \int_0^T (\| y_h - \tilde{y}_h \|^2 + \| z_h - \tilde{z}_h \|^2) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \| u_h - r_h u \|^2 \mathrm{d}t \to 0$$

对于这里所述有限元,利用 $u \in L^2(0, T; D(A)) \subset L^2(0, T; H^2(\Omega))$ 和内插结果我们看到

$$\tilde{z}_h \to 0 \text{ 在 } L^2(0, T; V) \text{ 中强收敛}$$

$$\widetilde{y}_h \to u, \text{在 } L^2(0,T;V) \text{ 中强收敛}$$

因此有

$$y_h \to u \text{ 和 } z_h \to 0 \text{ 在 } L^2(0,T;V) \text{ 中强收敛} \quad (3.46\text{b})$$

最后给出：当 $h \to 0$，y_h 是 $L^2(0,T;H)$ 中紧集的证明. 为此，只需证明

$$\int_0^T |y_h(t+r) - y_h(t)|^2 \mathrm{d}t \quad (3.47)$$

当 $r \to 0$ 时，关于 h 一致趋于零.

固定 r，积分(3.12)，有

$$\begin{aligned}
(y_h(t+r) - y_h(t), \widetilde{y}_h) &+ a\left(\int_t^{t+r} u_h(s)\mathrm{d}s, \widetilde{y}_h\right) \\
&+ \left(C\int_t^{t+r} u_h(s)\mathrm{d}s, \widetilde{y}_h\right) \\
&+ \left(\int_t^{t+r} (B(y_h(s)) + B(y_h(s), z_h(s)) \right. \\
&\left. + B(z_h(s), y_h(s)))\mathrm{d}s, \widetilde{y}_h\right) \\
&= \left(\int_t^{t+r} f(s)\mathrm{d}s, \widetilde{y}_h\right)
\end{aligned}$$

令 $\widetilde{y}_h = y_h(t+r) - y_h(t)$，且对 t 积分，有

$$\int_0^T |y_h(t+r) - y_h(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^6 I_j$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left|\int_0^T a\left(\int_t^{t+r} u_h(s)\mathrm{d}s, y_h(t+r) - y_h(t)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant r^{\frac{1}{2}}\nu\left(\int_0^{T+r} \| u_h(s) \|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \| y_h(t+r) - y_h(t) \| \mathrm{d}t\right) \\
&\leqslant cr^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

这里和下面的 c 表示与 r 和 h 无关的常数.

$$I_2 = \left|\int_0^T \left(C\int_t^{T+r} u_h(s)\mathrm{d}s, y_h(t+r) - y_h(t)\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant c_2 r^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T+r}\|u_h(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|y_h(t+r)-y_h(t)|\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant cr^{\frac{1}{2}}$$

$$I_3=\left|\int_0^T\left(\int_t^{t+r}B(y_h(s))\mathrm{d}s,y_h(t+r)-y_h(t)\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant c_1\int_0^T\left(\int_t^{t+r}|y_h(s)|\,\|y_h(s)\|\,\mathrm{d}s\right)\|y_h(t+r)-y_h(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_1 r^{\frac{1}{2}}|y_h|_{L^\infty(R_+;H)}\left(\int_0^{T+r}\|y_h(s)\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\int_0^T\|y_h(t+r)-y_h(t)\|\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant cr^{\frac{1}{2}}$$

与 B 有关的其余两项 I_4,I_5 类似估计.最后,

$$I_6=\left|\int_0^T\left(\int_t^{t+r}f(s)\mathrm{d}s,y_h(t+r)-y_h(t)\right)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant r^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T+r}|f(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\int_0^T|y_h(t+r)-y_h(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant cr^{\frac{1}{2}}$$

这表明

$$\int_0^T|y_h(t+r)-y_h(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant cr^{\frac{1}{2}}$$

当 $r\to 0$ 时,关于 h 一致地趋于零.

§4 DT 逼近格式和 AIM 的构造

基于惯性流形的隐式积分表式,采用时间离散和积分离散化方式,Debussche 和 Temam 给出了 AIM 的一种新的逼近式构造方法(DT 法),用这种方法构造的 AIM 具有如下特点:当方程的谱间隔条件满足时,AIM 收敛到 IM,而当谱间隙条件不满足时,它指数型逼近方程的吸引子.

在 Banach 空间 $\mathscr{E}$ 中我们研究非线性发展方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au-f(u)=0\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 A 是 $\mathscr{E}$ 中线性稠定算子，$f:E\to F$ 是 C^P 类非线性函数，E，F，$\mathscr{E}$ 均系 Banach 空间，且有 $E\subset F\subset\mathscr{E}$，内射是连续的，空间范数分别记为 $|\cdot|_{\varepsilon}$，$|\cdot|_E$，$|\cdot|_F$，假设 f 是整体 Lipschitz 连续的，且

$$\begin{cases}|f(x)-f(y)|_F\leqslant M_1|x-y|_E\\ |f(x)|_F\leqslant M_1(1+|x|_E)\end{cases}\tag{4.2}$$

我们假设线性方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=0\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

定义了 $\mathscr{E}$ 上强连续线性半群 $(\mathrm{e}^{-At})_{t\geqslant0}$，使得对所有 $t>0$，有 $\mathrm{e}^{-At}F\subset E$；而且存在 A 的特征投影算子列 $(P_n)_{n\in N}$ 以及两个数列 $(\lambda_n)_{n\in N}$ 和 $(\Lambda_n)_{n\in N}$，满足

$$\Lambda_n\geqslant\lambda_n\geqslant0\qquad\forall n>0\tag{4.3a}$$

$$\lambda_n\to\infty,当\ n\to\infty\tag{4.3b}$$

$$\frac{\Lambda_n}{\lambda_n}\ 当\ n\to\infty\ 时有界\tag{4.3c}$$

若记 $Q_n=I-P_n$，则：$P_n\mathscr{E}$，$Q_n\mathscr{E}$ 在 $\mathrm{e}^{-At}\Big|_{t\geqslant0}$ 作用下不变，又 $(\mathrm{e}^{-At})_{t\geqslant0}$ 可以延拓为 $P_n\mathscr{E}$ 上的一个群 $(\mathrm{e}^{-At})_{t\in R}$.

这些投影算子在下列意义下定义了 $(\mathrm{e}^{-At})_{t\geqslant0}$ 的一个指数两择性，即存在正数 k_1，k_2 和与 n 无关的 $\alpha\in[0,1)$，使得：

对每个 $t\leqslant0$，

$$|\mathrm{e}^{-At}P_n|_{L(E)}\leqslant k_1\mathrm{e}^{-\lambda_nt}$$

(H$_1$)

$$|\mathrm{e}^{-At}P_n|_{L(F,E)}\leqslant k_1\lambda_n^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda_nt}$$

对每个 $t>0$，

$$|e^{-At}Q_n|_{L(F,E)} \leqslant k_2\left(\frac{1}{t^{\alpha}} + \Lambda_n^{\alpha}\right)e^{-\Lambda_n t}$$

(H_2)

$$|A^{-1}e^{-At}Q_n|_{L(F,E)} \leqslant k_2\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-\Lambda_n t}$$

最后假设(4.1)定义了 E 上连续半群$(S(t))_{t\geqslant 0}$.

在第一章我们已证明,只要$\dfrac{\Lambda_n - \lambda_n}{\Lambda_n^{\alpha} + \lambda_n^{\alpha}}$充分大,从 $P_nE \to Q_nE$ 的映射:

$$T\psi(y_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{As}Q_n f(y(s) + \psi(y(s)))ds \tag{4.4}$$

在函数类空间 $\mathscr{F}_{b,l}$;

$$\mathscr{F}_{b,l} = \left\{\psi: P_nE - Q_nE, \text{Lip}\psi \leqslant l, \sup_{y\in P_nE}\frac{|\psi(y)|_E}{1 + |y|_E} \leqslant b\right\} \tag{4.5}$$

中具有不动点 ψ,即

$$\psi(y_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{As}Q_n f(y(s) + \psi(y(s)))ds \tag{4.6}$$

其中 y 是如下方程的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt} + Ay - P_n f(y + \psi(y)) = 0 \\ y(0) = y_0\end{cases} \tag{4.7}$$

这时 $M = \text{graph}(\psi(y))$构成(4.1)的有限维 C^1 类 IM.

定义 $\mathscr{F}_{b,l}$中度量

$$|\psi|_{\infty} = \sup_{y\in P_nE}\frac{|\psi(y)|_E}{1 + |y|_E} \tag{4.8}$$

则 $\mathscr{F}_{b,l}$是一完备度量空间 .

我们采用数值逼近(4.7)且同时将积分(4.4)离散化,再以迭代格式逼近 T,就可得到一族函数 ϕ_N,导出 AIM.

首先选择时间步长 τ 和整数N,去逼近(4.7)的解和逼近积分(4.4)如下:

$$y_{k+1} = R_{\tau}y_k + S_{\tau}P_n f(y_k + \psi(y_k)) \qquad k = 0,\cdots,N-1 \tag{4.9}$$

再考虑(4.4)的右边,当 $s\in(-(k+1)\tau,-k\tau]$时,$y=y(s)$用 $\bar{y}=\bar{y}(s)$代替,其中 $\bar{y}(s)$在每个$(-(k+1)\tau,-k\tau]$上等于 y_k,而 y_k 由(4.9)定义,我们希望 y_k 充分接近于$y(-k\tau)$.$k=0,\cdots,N-1$,而在$(-\infty,-N]$上取 $k=N$,这样就得到 T 的一种逼近 T_N^τ,经过计算(4.4),有

$$T_N^\tau\psi(y_0)=A^{-1}(I-\mathrm{e}^{-A\tau})\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-kA\tau}Q_nf(y_k+\psi(y_k))$$
$$+A^{-1}\mathrm{e}^{-NA\tau}Q_nf(y_N+\psi(y_N))\qquad(4.10)$$

假设 R_τ,S_τ 是线性算子且满足:

$$(\mathrm{H}_3)\qquad\begin{cases}|R_\tau P_n|_{L(E)}\leqslant\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}\\|S_\tau P_n|_{L(F,E)}\leqslant k_3\lambda_n^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)\end{cases}$$

k_3 与 n 无关.

我们希望(4.9)与(4.7)一致,对任何 $\psi\in\mathscr{F}_{b,l}$和$y_0\in P_nE$,令 y 是(4.7)的解且 $\widetilde{y}_k=y(-k\tau)$,然后我们假设

$$(\mathrm{H}_4)\qquad\begin{cases}\widetilde{y}_{k+1}=R_\tau\widetilde{y}_k+S_\tau P_nf(\widetilde{y}_k+\psi(\widetilde{y}_k))+\varepsilon_k\\|\varepsilon_k|_E\leqslant\alpha_1(\lambda_n)\tau^2(1+|y_0|_E)\mathrm{e}^{\tau(k+1)(\lambda_n+K_4\lambda_n^\alpha)}\end{cases}$$

又设$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$增长不太快,即

$$(\mathrm{H}_5)\qquad\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_E\leqslant\alpha_2(\lambda_n)(1+|y_0|_E)\mathrm{e}^{-(\lambda_n+K_5\lambda_n^\alpha)t},\quad\forall t\in(-\infty,0]$$

其中 K_4,K_5 与 N,τ,n 无关,$\alpha_1(\lambda_n),\alpha_2(\lambda_n)$与 λ_n 有关而与N,τ无关.

对于耗散发展方程,由(4.1)定义的半群具有吸引子 $\mathscr{A}$,而如 $u_0\in\mathscr{A}$,则 $u(t)\in\mathscr{A},\forall t\in R$,而且 u 在相应空间一致有界且通常 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$也一致有界,这时可用$(\mathrm{H}_4)'$代替$(\mathrm{H}_4)$;$(\mathrm{H}_5)'$代替$(\mathrm{H}_5)$

$$(\mathrm{H}_4)'\qquad\begin{cases}\widetilde{y}_{k+1}=R_\tau\widetilde{y}_k+S_\tau P_nf(u(-k\tau))+\varepsilon_k\\|\varepsilon_k|_E\leqslant\tau^2\beta_1\qquad\forall k\leqslant N\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_5)'\qquad\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_E\leqslant\beta_2\qquad\forall t\leqslant0$$

其中 $y=P_nu$ 是 $\mathscr{A}$ 上(4.1)的解在 P_nE 上投影，而 $\widetilde{y}_k=y(-k\tau)=Pu(-k\tau)$，这里 β_1,β_2 与 N,τ 或 n 无关 .

有了以上两种逼近，就可以构造 AIM 族 $\{\phi_N\}_{N\in\mathcal{N}}$. 取严格正数列 $(\tau_N)_{N\in\mathcal{N}}$，递归定义 ϕ_N：

$$\begin{cases}\phi_0 = 0 \\ \phi_{N+1} = T_N^{\tau_N}(\phi_N) \qquad N\geqslant 0\end{cases} \tag{4.11}$$

$$T_0^\tau\phi(y_0) = A^{-1}Q_Nf(y_0+\phi(y_0))$$

graph(ϕ_1)由第二章知是一个 AIM. 定义 $M_N=\text{graph}(\phi_N)$则得到一个 AIM 族 M_N，可以证明当 $\tau_N\to 0$，而当 $N\to+\infty$ 且 $N\tau_N\to\infty$ 时，M_N 越来越精确地逼近吸引子，而且只要谱间隙条件满足，就有 M_N 收敛到惯性流形 . 为证明结论的前半部分 . 我们有

引理 4.1 设(H_3)成立：

(i) $\psi\in\mathscr{F}_{b,l}$，$y_0\in P_nE$，由(4.9)定义$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$，则有

$$|y_k|_E\leqslant e^{k\tau(\lambda_n+k_5M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(|y_0|_E+1)$$

只要 $\lambda_n^{1-\alpha}\geqslant k_3M_1(1+b)$，对 $k\leqslant N$ 成立 .

(ii) 设 $\psi^i\in\mathscr{F}_{b,l}$，$y_0^i\in P_nE$，由(4.9)定义的$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$，$y_0=y_0^i$，$i=1,2$，有

$$|y_k^1-y_k^2|_E\leqslant e^{k\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|y_0^1-y_0^2|_E$$
$$+\lambda_n^\alpha k\tau e^{k\tau(\lambda_n+k_6\lambda_n^\alpha)}k_3M_1|\psi^1-\psi^2|_\infty(1+|y_0^1|_E)$$

其中 $k_6=k_3M_1\max(1+l,1+b)$.

证明 由(H_3)，(4.2)和(4.5)推知：

$$|y_{k+1}|_E\leqslant e^{\tau\lambda_n}|y_k|_E$$
$$+k_3\lambda_n^{\alpha-1}(e^{\tau\lambda_n}-1)(M_1(1+b)(1+|y_k|_E)$$

利用

$$e^{\tau\lambda_n}-1\leqslant\tau\lambda_n e^{\tau\lambda_n}$$

和

$$1+\tau k_1M_1(1+b)\lambda_n^\alpha\leqslant e^{\tau k_1M_1(1+b)\lambda_n^\alpha}$$

有

$$|y_{k+1}|_E \leqslant \mathrm{e}^{\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}|y_k|_E + k_3\lambda_n^{\alpha-1}M_1(1+b)(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)$$

由这递推不等式得到：

$$|y_k|_E \leqslant \mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(|y_0|_E + k_3M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha-1})$$

(i)获证．利用同样方法，记 $y_k = y_k^1 - y_k^2$，则

$$\begin{aligned}|y_{k+1}|_E \leqslant \mathrm{e}^{\tau\lambda_n}|y_k|_E &\\ &+ k_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)((1+l)|y_k|_E \\ &+ |\psi^1-\psi^2|_\infty(1+|y_k^1|_E))\end{aligned}$$

应用(i)代入 $y_k^1, k=0,\cdots,N$，得到

$$\begin{aligned}|y_{k+1}|_E \leqslant& \mathrm{e}^{\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|y_k|_E \\ &+ \tau k_3M_1\lambda_n^\alpha|\psi^1-\psi^2|_\infty(1+|y_0^1|_E)\mathrm{e}^{(k+1)\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}\end{aligned}$$

再用递归公式得到(ii)．

利用同样方法，有

引理 4.2 设(H_3)成立，设 $\psi\in\mathscr{F}_{b,l}, y_0\in P_nE, (e_k)_{k=0,\cdots,N}$是 P_nE 中序列，由(4.9)定义$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$，由下式定义$(\widetilde{y}_k)_{k=0,\cdots,N}$：

$$\begin{aligned}\widetilde{y}_{k+1} &= R_\tau\widetilde{y}_k + S_\tau P_nf(\widetilde{y}_k+\psi(\widetilde{y}_k)) + e_k \\ \widetilde{y}_0 &= y_0\end{aligned}$$

则有

$$|\widetilde{y}_k - y_k|_E \leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{e}^{(k-1-j)\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|e_j|_E,\quad k=0,\cdots,N.$$

我们给出 M_N 对吸引子 $\mathscr{A}$ 的逼近估计．假设(4.1)有吸引子 $\mathscr{A}$ 且对 $\mathscr{A}$ 上每个解 u，$(H_4)'$，$(H_5)'$成立．由于问题仅涉及长时间动态，我们假设 f 在一个吸引球外部被截断，从而 f 有界且整体 Lipschitz 连续．记

$$M_0 = \sup_{u\in E}|f(u)|_F \tag{4.12}$$

这样，我们可用$\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}$代替 $\mathscr{F}_{b,l}$：

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}=\{\psi:P_nE\rightarrow Q_nE;\ |\psi(y)|_E\leqslant b,\forall y\in P_nE,$$
$$|\psi(x)-\psi(y)|_E\leqslant l|x-y|_E,\forall x,y\in P_nE\}\quad(4.13)$$

命题 4.3 设(H_2),(H_3)成立,则存在两个常数 c_1,c_2 使得如果

$$(N+1)\tau\leqslant\frac{c_1}{\lambda_n^{\alpha}}\text{ 和 }\lambda_n\geqslant c_2$$

则存在 l,b_0 使得对所有 $b\geqslant b_0,T_N^{\tau}$ 映$\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}$到其自身.

证明 令 $\psi\in\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l},y_0\in P_nE$,在$(-\infty,0]$上定义 $\bar{y}$:

$$\begin{cases}\bar{y}(s)=y_k & \text{如} S\in(-(k+1)\tau,-k\tau],k=0,\cdots,N-1\\ \bar{y}(s)=y_N & \text{如 } S\in(-\infty,-N\tau]\end{cases}\quad(4.14)$$

其中$(y_k),k=0,\cdots,N$ 由(4.9)计算,则 $T_N^{\tau}\psi(y_0)$可以改写为

$$T_N^{\tau}\psi(y_0)=\int_{-\infty}^{0}e^{AS}Q_nf(\bar{y}(s)+\psi(\bar{y}(s)))ds$$
$$=\int_{-(N+1)\tau}^{0}e^{AS}Q_nf(\bar{y}(s)+\psi(\bar{y}(s)))ds$$
$$+A^{-1}e^{-(N+1)A\tau}Q_nf(y_N+\psi(y_N))$$

由(H_2)和(4.12),

$$|T_N^{\tau}\psi(y_0)|_E\leqslant\int_{-\infty}^{0}k_2M_0\left(\frac{1}{|s|^{\alpha}}+\Lambda_n^{\alpha}\right)e^{\Lambda_nS}ds$$
$$\leqslant k_2M_0\left(\int_{-\infty}^{0}\frac{e^u}{|u|^{\alpha}}du+1\right)\Lambda_n^{\alpha-1}$$
$$\leqslant k_2M_0(\Gamma(-1-\alpha)+1)\Lambda_n^{\alpha-1}\leqslant b$$

只要 $b\geqslant b_0=k_2M_0(\Gamma(-1-\alpha)+1)C_2^{\alpha-1}$ (4.15)

现在取 $y_0^1,y_0^2\in P_nE,(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$由(4.9)定义,其中 $y_0=y_0^i$,同上方法构造 $\bar{y}^i,i=1,2$,则利用(H_2),(4.13)和(4.2),有

$$|T_N^{\tau}\psi(y_0^1)-T_N^{\tau}\psi(y_0^2)|_E\leqslant k_2M_1(1+l)$$

$$\times \int_{-(N+1)\tau}^{0} \left(\frac{1}{|s|^{\alpha}} + \Lambda_n^{\alpha} \right) e^{\Lambda_n S} |\bar{y}^1(s) - \bar{y}^2(s)|_E ds$$

$$+ k_2 M_1 (1 + l) \Lambda_n^{\alpha-1} e^{-\Lambda_n (N+1)\tau} |y_N^1 - y_N^2|_E$$

由引理4.1(ii)有

$$|y_k^1 - y_k^2|_E \leqslant e^{k\tau(\lambda_n + k_3 M_1 (1+l)\lambda_n^{\alpha})} |y_0^1 - y_0^2|_E$$

于是对如上所定义的 s,有

$$|\bar{y}_{(s)}^1 - \bar{y}_{(s)}^2|_E \leqslant e^{-s(\lambda_n + k_3 M_1 (1+l)\lambda_n^{\alpha})} |y_0^1 - y_0^2|_E$$

因此,

$$| T_N^{\tau} \psi(y_0^1) - T_N^{\tau} \psi(y_0^2) |_E \leqslant k_2 M_1 (1 + l) |y_0^1 - y_0^2|_E$$

$$\times \int_{-(N+1)\tau}^{0} \left(\frac{1}{|s|^{\alpha}} + \Lambda_n^{\alpha} \right) e^{(\Lambda_n - \lambda_n - k_3 M_1 (1+l)\lambda_n^{\alpha}) s} ds$$

$$+ k_2 M_1 (1 + l) |y_0^1 - y_0^2|_E \Lambda_n^{\alpha-1} e^{-(\Lambda_n - \lambda_n - k_3 M_1 (1+l)\lambda_n^{\alpha})(N+1)\tau}$$

利用(4.3)和$(N+1)\tau \leqslant \frac{c_1}{\lambda_n^{\alpha}}$,我们有

$$\int_{-(N+1)\tau}^{0} \frac{1}{|s|^{\alpha}} e^{(\Lambda_n - \lambda_n - k_3 M_1 (1+l)\lambda_n^{\alpha}) s} ds$$

$$\leqslant e^{k_3 M_1 c_1 (1+l)} \int_{-(N+1)\tau}^{0} \frac{1}{|s|^{\alpha}} ds$$

$$\leqslant e^{k_3 M_1 C_1 (1+l)} \frac{1}{1-\alpha} \lambda_n^{\alpha(\alpha-1)} c_1^{1-\alpha}$$

如果

$$\left(k_2 M_1 \left(\frac{1}{1-\alpha} \lambda_n^{\alpha(\alpha-1)} c_1^{1-\alpha} + \Lambda_n^{\alpha-1} \right) (1 + l) \right.$$

$$\left. + \frac{k_2}{k_3} \left(\frac{\Lambda_n}{\lambda_n} \right)^{\alpha} \right) e^{k_3 M_1 c_1 (1+l)} \leqslant l \qquad (4.16)$$

则有

$$| T_N^{\tau} \psi(y_0^1) - T_N^{\tau} \psi(y_0^2) |_E \leqslant l |y_0^1 - y_0^2|_E$$

我们选取 c_2 和 δ_0 使得当 $\lambda_n \geqslant c_2$ 和 $c_1 \leqslant \delta_0$ 时有

$$k_2 M_1 \left(\frac{1}{1-\alpha} \lambda_n^{\alpha(\alpha-1)} c_1^{1-\alpha} + \Lambda_n^{\alpha-1} \right) e^{k_3 M_1 c_1} \leqslant \frac{1}{2}$$

然后取 $c_1=\min\left(\delta_0,\dfrac{l_n 3/2}{6k_3M_1c'_3}\right)$和 $l=6c'_3$,其中

$$c'_3=\frac{k_2}{k_3}\sup_k\left(\frac{\Lambda_k}{\lambda_k}\right)^{\alpha}\mathrm{e}^{k_3M_1\delta_0}+\frac{1}{2}$$

有$\left(\dfrac{1}{2}l+c'_3\right)\mathrm{e}^{k_3M_1c_1l}\leqslant l$,从而(4.16)成立,命题证毕 .

上述结果表明如果以如下方式选取序列$(\tau_N)_{N\in\mathcal{N}}$

$$\tau_N\leqslant\frac{c_1}{(N+1)\lambda_n^{\alpha}}\qquad\forall N\tag{4.17}$$

则$(\phi_N)_{N\in\mathcal{N}}\subset\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}$,其中 b,l 由命题 4.3 给出 .

现在我们估计 M_N 与吸引子间的距离,即

$$\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|\phi_N(y)-z|_E$$

我们有

命题 4.4 在命题 4.3 同样假设和$(\mathrm{H}_4)'$,$(\mathrm{H}_5)'$条件下,存在常数 c_3,c_4,c_5 使得对任何 $\psi\in\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}$,有

$$\begin{aligned}\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|T_N^{\tau}\psi(y)-z|_E\leqslant{}&c_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E\\&+c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau\\&+c_5\left(\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha}}{\Lambda_n}+\Lambda_n^{\alpha-1}\right)\mathrm{e}^{-\Lambda_n(N+1)\tau}\end{aligned}$$

证明 设 $\psi\in\widetilde{\mathscr{F}}_{b,l}$, $u_0=y_0+z_0\in\mathscr{A}$, 记$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$是由(3.9)构造的序列,$\bar{y}$ 是$(-\infty,0]$上由(3.14)定义的函数,令 $y=P_nu$, $z=Q_nu$ 和 $\widetilde{y}_k=y(-k\tau)$,则

$$T_N^{\tau}\psi(y_0)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{As}Q_nf(\bar{y}(s)+\psi(\bar{y}(s)))\mathrm{d}s$$

$$z_0=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{As}Q_nf(y(s)+z(s))\mathrm{d}s$$

因此

$$|T_N^{\tau}\psi(y_0)-z_0|_E\leqslant\int_{-\infty}^{0}|\mathrm{e}^{As}Q_nf(\bar{y}(s)$$

$$+\psi(\bar{y}(s)))-f(y(s)+z(s))|_E\mathrm{d}s$$

利用(H_2),(4.2),(4.12),(4.13)得到

$$|T_N^\tau\psi(y_0)-z_0|_E\leqslant k_2M_1\int_{-(N+1)\tau}^{0}\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)_{\mathrm{e}\Lambda_n s}$$

$$\times((1+l)|y(s)-\bar{y}(s)|_E$$

$$+|\psi(y(s))-z(s)|_E)\mathrm{d}s$$

$$+2M_0k_2\int_{-\infty}^{-(N+1)\tau}\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}\mathrm{d}s \qquad (4.18)$$

由(H_4),

$$\widetilde{y}_{k+1}=R_\tau\widetilde{y}_k+S_\tau P_nf(\widetilde{y}_k+z(-k\tau))+\varepsilon_k$$

利用引理4.2,有

$$|y_k-\widetilde{y}_k|_E\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{e}^{(k-1-j)\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}$$

$$\times(|\varepsilon_j|_E+|S_\tau P_n(f(\widetilde{y}_j+z(-j\tau))$$

$$-f(\widetilde{y}_j+\psi(y_j)))|_E)$$

$$\leqslant[\tau^2\beta_1+k_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}(\mathrm{e}^{\tau\lambda_n}-1)\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E]$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}}{\mathrm{e}^{\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}-1}$$

$$\leqslant\Big[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha}$$

$$+k_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E\Big]$$

$$\times\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}$$

对任何 $s\in(-(k+1)\tau,-k\tau)$,(H_5)′给出:

$$|y(s)-\bar{y}(s)|_E\leqslant\tau\beta_2+|y_k-\tilde{y}_k|_E$$

$$\leqslant\tau\beta_2+\Big[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha}$$

$$+k_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E\Big]\mathrm{e}^{-s(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}$$

将上式代入(4.18),得到

$$
\begin{aligned}
|T_N^\tau\psi(y_0)-z_0|_E \leqslant\ & k_2M_1\beta_2(1+l)\left(\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{e}^u}{|u|^\alpha}du+1\right)\Lambda_n^{\alpha-1}\tau \\
& + k_2M_1(1+l)\left[\frac{\tau\beta_1}{\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha}\right. \\
& \left. + k_3M_1\lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E\right] \\
& \times\int_{-(N+1)\tau}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{-k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha s}\mathrm{d}s \\
& + k_2M_1(\Gamma(-\alpha-1)+1)\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E \\
& + 2k_2M_0\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha}+\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n}\mathrm{e}^{-\Lambda_n(N+1)\tau}
\end{aligned}
$$

由命题 4.3 的证明,有

$$
k_2M_1(1+l)\int_{-(N+1)\tau}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha}+\Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{-k_3M_1(1+l)s}\mathrm{d}s \leqslant l
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\left|T_N^\tau\psi(y_0)-z_0\right|_E \leqslant\ & c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau \\
& + c_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{y+z\in\mathscr{A}}|\psi(y)-z|_E \\
& + 2k_2M_0\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha}+\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n}\mathrm{e}^{-\Lambda_n(N+1)\tau}
\end{aligned}
$$

其中 c_3,c_4 与 N,τ,n 无关 . 证毕 .

如果 τ_N 满足(4.17)和 $\lambda_n\geqslant c_2$,则有

$$
\begin{aligned}
\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}\left|\phi_{N+1}(y)-z\right|_E \leqslant\ & c_3\Lambda_n^{\alpha-1}\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}\left|\phi_N(y)-z\right|_E \\
& + c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\tau_N \\
& + c_5\left(\frac{((N+1)\tau)^{-\alpha}}{\Lambda_n}+\Lambda_n^{\alpha-1}\right)\mathrm{e}^{-\Lambda_n(N+1)\tau_N}
\end{aligned}
$$

利用这一递推式得到:

定理 4.5 设(H_2),(H_3),$(\mathrm{H}_4)'$,$(\mathrm{H}_5)'$成立,序列(τ_N)满足

$$
c_6\leqslant\tau_N(N+1)\lambda_n^\alpha\leqslant c_1 \qquad \forall N
$$

对某一 c_6 成立，c_1 是命题 4.3 中给出，则由(4.11)定义的 $(\phi_N)_{N\in\mathcal{N}}$ 族满足

$$\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|\phi_N(y)-z|_E\leqslant(c_3\Lambda_n^{\alpha-1})^N\max_{u\in\mathscr{A}}|Q_nu|_E$$
$$+c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\sum_{j=0}^{N-1}(c_3\Lambda_n^{\alpha-1})^j\tau_{N-1-j}$$
$$+4c_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-c_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$$

如果 $\lambda_n\geqslant c_6$，其中 c_6 是另一个常数.

这就推出从 M_N 到 $\mathscr{A}$ 的半距离估计：

$$d_E(\mathscr{A},M_N)=\sup_{v\in\mathscr{A}}\inf_{w\in M_N}|v-w|_E$$
$$\leqslant(c_3\Lambda_n^{1-\alpha})^N\max_{u=y+z\in\mathscr{A}}|Q_nu|_E$$
$$+c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\sum_{j=0}^{N-1}(c_3\Lambda_n^{\alpha-1})^j\tau_{N-1-j}$$
$$+4c_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-c_6\Lambda_n^{1-\alpha}}\tag{4.19}$$

(4.19)右边前两项当 $N\to\infty$ 时趋于零．因此，这个距离递减地收敛到很小的数 $4c_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-c_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$，从而，如果我们取 N 充分大，则 M_N 就是一个显式 AIM，其逼近阶数为 $8c_5\Lambda_n^{\alpha-1}e^{-c_6\Lambda_n^{1-\alpha}}$.

注意到(4.19)右边当 N 递增时递减得相当慢，此外，由每一步逐个选取点的数量的增加而导出的结果具有人为性，缓慢衰减的项是

$$c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\sum_{j=0}^{N-1}(c_3\Lambda_n^{\alpha-1})^j\tau_{N-j-1}$$

选取 $\phi_{N+1}=T_{2^N}^{\tau_N}\phi_N$，而且

$$c_6\leqslant(2^N+1)\tau_N\lambda_n^\alpha\leqslant c_1$$

则这项变为

$$c_1c_4(\Lambda_n^{\alpha-1}\beta_2+\Lambda_n^{-1}\beta_1)\frac{1}{2^N\lambda_n^\alpha(1-2c_3\Lambda_n^{\alpha-1})}$$

从而递减阶数以 N 为指数．

应用

研究如下问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = g(u) \\ u(0) = u_0\end{cases} \tag{4.20}$$

其中 A 为 Hilbert 空间 H 上无界自共轭正算子，且有逆紧算子 A^{-1}，取 $\varepsilon = H, F = D(A^{\gamma}), E = D(A^{\alpha+\gamma}), g \in C^1 : D(A^{\alpha+\gamma}) \to D(A^{\gamma}), \gamma \geqslant 0, \alpha \in [0,1)$，记 A 的特征值 $0 < \mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \cdots \to +\infty$，取 $k_1 = k_2 = 1, \Lambda_n = \mu_{n+1}, \lambda_n = \mu_n$，则 (H_1)，(H_2) 成立，如果设 (4.20) 有有界吸收集，则引入截断函数后，g 满足整体 Lip 条件

取 Euler 逼近为 (4.9)：

$$\frac{y_k - y_{k+1}}{\tau} + Ay_k = P_n g(y_k + \psi(y_k))$$

这时 $R_\tau = I + \tau A, S_\tau = -\tau I$，则取 $k_3 = 1$，(H_3) 成立．为验证 (H_5)，利用 (4.2)，有

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{\alpha+\gamma} \leqslant (\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha}) |y|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha} M_1(1+b) \tag{4.21}$$

由

$$y(t) = \mathrm{e}^{-At} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)} P_n g(y(s) + \psi(y(s)))\mathrm{d}s$$

可以得到

$$|y(t)|_{\alpha+\gamma} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_n t} |y(0)|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha-1} M_1(1+b) + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha} \int_t^0 \mathrm{e}^{-\lambda_n(t-s)} |y(s)|_{\alpha+\gamma} \mathrm{d}s$$

利用 Gronwall 不等式后代入 (4.21) 得到

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{\alpha+\gamma} \leqslant 3(\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})(|y_0|_{\alpha+\gamma} + \lambda_n^{\alpha-1} M_1(1+b))\mathrm{e}^{-(\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^{\alpha})t}$$

取

$$\alpha_2(\lambda_n) = 3(\lambda_n + M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)\max(1, M_1(1+b)\sup_n \lambda_n^{\alpha-1})$$

$k_5 = M_1(1+b)$，就导出(H_5)；

现在推导(H_4)，设 y 是(4.20)的解，如果我们定义 $\widetilde{y}_k = y(-k\tau)$，则

$$\frac{\widetilde{y}_k - \widetilde{y}_{k+1}}{\tau} + A\widetilde{y}_k = P_n g(\widetilde{y}_k + \psi(\widetilde{y}_k)) + \varepsilon'_k$$

其中

$$\varepsilon'_k = \frac{1}{\tau}\int_{-(k+1)\tau}^{-k\tau}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(s) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(-k\tau)\right)\mathrm{d}s$$

因此 $\varepsilon_k = \tau\varepsilon'_k$.

利用方程

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(s) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(-k\tau)\right|_{\alpha+\gamma} \leqslant |A(y(s) - y(-k\tau))|_{\alpha+\gamma} + |P_n(g(y(s) + \psi(y(s))) - g(\widetilde{y}_k + \psi(\widetilde{y}_k)))|_{\alpha+\gamma}$$

由于 $\psi \in \mathscr{F}_{b,l}$ 和(4.2)(以 g 代 f)，有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(s) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(-k\tau)\right|_{\alpha+\gamma} \\
&\leqslant (\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)|y(s) - y(-k\tau)|_{\alpha+\gamma} \\
&\leqslant \tau(\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)\int_{-k\tau}^{s}\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(\theta)\right|_{\alpha+\gamma}\mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \tau(\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)(k\tau + s)\alpha_2(\lambda_n)\mathrm{e}^{-(\lambda_n + k_5\lambda_n^\alpha)t}
\end{aligned}$$

记 $\alpha_1(\lambda_n) = (\lambda_n + M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)\alpha_2(\lambda_n)$，$k_4 = k_5$，这就推得($H_4$)成立．我们还可以证明($H_4$)′，($H_5$)′，于是利用(4.11)构造$\{\phi_N\}$，得到一族 AIM.

第四章　AIM的收敛性

第二章和第三章表明,不同耗散性的非线性发展方程,有不同的构造 AIM 的方法,即使对同一个方程,也可以有几种构造 AIM 的不同的方法,于是产生两个问题;其一,对于具有 IM 的非线性发展方程,用哪一种方法构造的 AIM 是收敛到 IM 的? 其收敛的正则性怎样? 其二,如果研究的方程,IM 的存在性未知,则 AIM 是否收敛? 本章对第一个问题给出两种不同的构造方法下 AIM 的收敛性,其中一个利用谱间隙条件,另一个则利用半群算子 $s(t)$ 的强收缩性及锥不变性．本章主要参考文献见[34],[87]~[96].

§1　DT 逼近模式下 AIM 的收敛性

本节研究的方程、假设条件以及记号均与第三章§4 相同．对于方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au=f(u)\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{1.1}$$

假设(4.2),$(H_2)\sim(H_5)$成立,此外设谱间隙条件成立,从而 IM 存在,我们证明当 $N\to\infty$ 使得 $\tau_N N\to\infty$ 时,用第三章(4.11)构造的 AIM: graph(ϕ_N)收敛到 IM. 先有

命题 1.1　设(H_2),(H_3)成立,存在常数 c_8 使得如果 $\Lambda_n-\lambda_n\geqslant c_8(\Lambda_n^\alpha+\lambda_n^\alpha)$,则对任何 N 和 $\tau>0$,T_N^τ 映 $\mathscr{F}_{b,l}$到其自身,而且严格压缩,压缩常数小于$\dfrac{1}{2}$.

证明　设 $\psi\in\mathscr{F}_{b,l}$, $y_0\in P_nE$,由第三章(4.9)构造$(y_k)k=0,\cdots,N$ 和由(4.14)构造 $\bar{y}$,由第三章引理 4.1 推得对于所有 $s\leqslant0$,

只要 $c_8 \geqslant k_3(1+b)M_1\left(\sup_k \frac{\Lambda_k}{\Lambda_k}\right)^{1-\alpha}$，有

$$|\bar{y}(s)|_E \leqslant e^{-s(\lambda_n + k_3 M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(|y_0|_E + 1)$$

又

$$T_N^\tau \psi(y_0) = \int_{-\infty}^0 e^{As} Q_n f(\bar{y}(s) + \psi(\bar{y}(s)))\mathrm{d}s$$

利用(H_2)，第三章(4.2)和(4.5)推得

$$\begin{aligned}
|T_N^\tau \psi(y_0)|_E \leqslant & \int_{-\infty}^0 k_2 M_1(1+b)(1+|y_0|_E) \\
& \times \left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right) e^{(\Lambda_n - \lambda_n - k_3 M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)s}\mathrm{d}s \\
& + \int_{-\infty}^0 k_2 M_1(1+b)\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right) e^{\Lambda_n s}\mathrm{d}s \\
\leqslant & k_2 M_1(1+b)(\Gamma(-\alpha-1)+1) \\
& \times \left(\frac{\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n - \lambda_n - k_3 M_1(1+b)\lambda_n^\alpha}\right. \\
& \left. + \Lambda_n^{\alpha-1}\right)(1+|y_0|_E) \\
\leqslant & b(1+|y_0|_E)
\end{aligned}$$

只要取 $c_8 \geqslant \max\left\{k_3 M_1(1+b), \frac{2k_2 M_1(1+b)}{b}\right\}(\Gamma(-\alpha-1)+1)$.

现在取 $y_0^1, y_0^2 \in P_n E$，由(4.9)构造$(y_k^i)_{k=0,\cdots,N}$，取 $y_0 = y_0^i$，而 $\bar{y}^i$ 同前所定义，$i=1,2$；由第三章引理 4.1，对所有 $s \leqslant 0$，我们有

$$|\bar{y}^1(s) - \bar{y}^2(s)|_E \leqslant e^{-s(\lambda_n + k_6 \lambda_n^\alpha)}|y_0^1 - y_0^2|_E$$

因此从(H_2)和(4.2)，(4.5)，有

$$\begin{aligned}
& |T_N^\tau \psi(y_0^1) - T_N^\tau \psi(y_0^2)|_E \\
\leqslant & \int_{-\infty}^0 |e^{As} Q_n(f(\bar{y}^1(s) + \psi(\bar{y}^1(s))) - f(\bar{y}^2(s) + \psi(\bar{y}^2(s)))|_E \mathrm{d}s \\
\leqslant & k_2 M_1(1+l)|y_0^1 - y_0^2|_E(\Gamma(-\alpha-1)+1)\frac{\Lambda_n^\alpha}{\Lambda_n - \lambda_n - k_6\lambda_n^\alpha}
\end{aligned}$$

$$\leqslant l\,|y_0^1 - y_0^2|_E$$

只要有 $c_8 \geqslant \max\left(k_6, \dfrac{k_2M_1(1+l)}{l}\right)$.

剩下证明 T_N^τ 是严格压缩的．我们取 $\psi^1, \psi^2 \in \mathscr{F}_{b,l}$, $y_0 \in P_nE$,同前面一样构造$(y_k^1)_{k=0,\cdots,N}$和$(y_k^2)_{k=0,\cdots,N}$取 $\psi = \psi^1$ 和 $\psi = \psi^2$;且定义 $\bar{y}^1$ 和 $\bar{y}^2$,则取 $y_0 = y_0^1 = y_0^2$,由引理 4.1 推得

$$|\bar{y}^1(s) - \bar{y}^2(s)|_E \leqslant k_3M_1\lambda_n^\alpha\,|\psi_1 - \psi_2|_\infty(1 + |y_0|_E)\,|s|\,\mathrm{e}^{-s(\lambda_n + k_6\lambda_n^\alpha)}$$

于是

$$\begin{aligned}
&|T_N^\tau\psi^1(y_0) - T_N^\tau\psi^2(y_0)|_E \\
&\leqslant \int_{-\infty}^0 \Big|\mathrm{e}^{As}Q_n(f(\bar{y}^1(s) + \psi^1(\bar{y}^1(s))) \\
&\quad - f(\bar{y}^2(s) + \psi^2(\bar{y}^2(s))))\Big|_E \mathrm{d}s \\
&\leqslant k_2M_1\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}((1+l)|(\bar{y}^1(s) - \bar{y}^2(s)|_E \\
&\quad + |\psi_1 - \psi_2|_\infty(1 + |\bar{y}^1(s)|_E))\mathrm{d}s \\
&\leqslant k_2M_1|\psi_1 - \psi_2|_\infty[k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha(1 + |y_0|_E) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0(|s|^{1-\alpha} + \Lambda_n^\alpha|s|)\mathrm{e}^{(\Lambda_n - \lambda_n - k_6\lambda_n^\alpha)s}\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{\Lambda_n s}\mathrm{d}s \\
&\quad + (1 + |y_0|_E)\int_{-\infty}^0\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right)\mathrm{e}^{(\Lambda_n - \lambda_n - k_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)s}\mathrm{d}s]
\end{aligned}$$

其中,我们已应用定理 4.1(i)(第三章)于 $\bar{y}^1$,计算上式有

$$\begin{aligned}
&|T_N^\tau\psi^1(y_0) - T_N^\tau\psi^2(y_0)|_E \\
&\leqslant k_2M_1(1 + |y_0|_E)|\psi_1 - \psi_2|_\infty \\
&\quad \times \Big[\Lambda_n^{\alpha-1}(\Gamma(-\alpha - 1) + 1)
\end{aligned}$$

$$+ k_3M_1(1+l)\frac{\Lambda_n^\alpha\lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n-\lambda_n-k_6\lambda_n^\alpha)^2}((1-\alpha)\Gamma(-\alpha-1)+1)$$

$$+\frac{\Lambda_n^\alpha}{(\Lambda_n-\lambda_n-k_3M_1(1+b)\lambda_n^\alpha)}(\Gamma(-\alpha-1)+1)\Big]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+|y_0|_E)|\psi^1-\psi^2|_\infty$$

只要 c_8 是与 n 无关的适当大的常数．

下一个命题给出 $T_N^\tau\psi$ 与 ϕ 间距离估计，其中 ϕ 是映射 T 的不动点，$\psi\in\mathscr{F}_{b,l}$.

命题 1.2 在定理 4.5(第三章)，命题 1.1 的假设条件下，又设 (H_4)，(H_5) 成立，存在两个常数 $c_9,c_{10},c_9\geqslant c_8$，使得如果 $\Lambda_n-\lambda_n\geqslant c_9(\Lambda_n^\alpha+\lambda_n^\alpha)$，则对所有 $\psi\in\mathscr{F}_{b,l}$ 和所有 N,τ:

$$|T_N^\tau\psi-\phi|_\infty\leqslant\frac{1}{2}|\psi-\phi|_\infty+\varepsilon(N,\tau)$$

其中

$$\varepsilon(N,\tau)=c_{10}((\alpha_2(\lambda_n)+\alpha_1(\lambda_n)\lambda_n^{-\alpha})\tau+\alpha_2(\lambda_n)\Lambda_n^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\Lambda_n^\alpha N\tau})$$

证明 由命题 1.1 我们有

$$|T_N^\tau\psi-\phi|_\infty\leqslant\frac{1}{2}|\psi-\phi|_\infty+|T_N^\tau\phi-\phi|_\infty$$

故只须估计 $|T_N^\tau\phi-\phi|_\infty$. 记 y 是如下问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Ay=P_nf(y+\phi(y))\\ y(0)=y_0\end{cases}$$

令 $\tilde{y}_k=y(-k\tau)$，同前面一样构造 $(y_k)_{k=0,\cdots,N}$，其中 $\psi=\phi$，由 (H_4) 和引理 4.2(第三章)其中 $e_k=\varepsilon_k$,

$$|\tilde{y}_k-y_k|_E\leqslant\sum_{j=0}^{k-1}\mathrm{e}^{(k-1-j)\tau(\lambda_n+k_3M_1(1+l)\lambda_n^\alpha)}|\varepsilon_j|_E$$

$$\leqslant\alpha_1(\lambda_n)\tau^2(1+|y_0|_E)k\mathrm{e}^{k\tau(\lambda_n+c_4'\lambda_n^\alpha)}\quad(1.2)$$

其中 $c_4'=\max(k_4,k_3M_1(1+l))$，定义 $\bar{y}$ 如前，则利用 (H_5)，和 (1.2)，对任何 $s\in(-(k+1)\tau,-k\tau]$,

$$|y(s)-\bar{y}(s)|_E \leqslant \tau\alpha_2(\lambda_n)(1+|y_0|_E)e^{-s(\lambda_n+k_5\lambda_n^{\alpha})}$$
$$+\tau\alpha_1(\lambda_n)(1+|y_0|_E)|s|e^{-s(\lambda_n+c'_4\lambda_n^{\alpha})} \quad (1.3)$$

类似地如 $s\in(-\infty,-N\tau]$,

$$|y(s)-\bar{y}(s)|_E \leqslant |s+N\tau|\alpha_2(\lambda_n)(1+|y_0|_E)e^{-s(\lambda_n+k_5\lambda_n^{\alpha})}$$
$$+\tau\alpha_1(\lambda_n)(1+|y_0|_E)|s|e^{-s(\lambda_n+c'_4\lambda_n^{\alpha})} \quad (1.4)$$

现在我们有

$$|T_N^{\tau}\phi(y_0)-\phi(y_0)|_E$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{0}|e^{As}Q_n(f(\bar{y}(s)+\phi(\bar{y}(s)))-f(y(s)+\phi(y(s)))|_E\,ds$$
$$\leqslant k_2M_1(1+l)\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{|s|^{\alpha}}+\Lambda_n^{\alpha}\right)e^{\Lambda_n s}|\bar{y}(s)-y(s)|_E\,s\,ds$$
$$\leqslant k_2M_1(1+l)(1+|y_0|_E)$$
$$\times\left[\alpha_2(\lambda_n)\tau\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{|s|^{\alpha}}+\Lambda_n^{\alpha}\right)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-k_5\lambda_n^{\alpha})s}ds\right.$$
$$+\alpha_1(\lambda_n)\tau\int_{-\infty}^{0}(|s|^{1-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha}|s|)e^{(\Lambda_n-\lambda_n-c'_4\lambda_n^{\alpha})s}ds$$
$$\left.+\alpha_2(\lambda_n)\int_{-\infty}^{-N\tau}|s+N\tau|(|S|^{-\alpha}+\Lambda_n^{\alpha})e^{(\Lambda_n-\lambda_n-k_5\lambda_n^{\alpha})s}s\,ds\right]$$
$$\leqslant(1+|y_0|_E)c_{10}\left(\alpha_2(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^{\alpha}\tau}{\Lambda_n-\lambda_n-k_5\lambda_n^{\alpha}}\right.$$
$$+\alpha_1(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^{\alpha}\tau}{(\Lambda_n-\lambda_n-c'_4\lambda_n^{\alpha})^2}$$
$$\left.+\alpha_2(\lambda_n)\frac{\Lambda_n^{\alpha}}{(\Lambda_n-\lambda_n-k_5\lambda_n^{\alpha})^2}e^{-(\Lambda_n-\lambda_n-k_5\lambda_n^{\alpha})N\tau}\right)$$
$$\leqslant c_{10}(1+|y_0|_E)(\alpha_2(\lambda_n)\tau+\alpha_1(\lambda_n)\Lambda_n^{-\alpha}\tau+\alpha_2(\lambda_n)\Lambda_n^{-\alpha}e^{-\Lambda_n^{\alpha}N\tau}) \quad (1.5)$$

只要 $c_9\geqslant\max(k_5,1,c_8,c'_4)$.

c_{10}可以确切地计算出来且与 N,τ 或 n 无关．由于当 $\tau\to0$

和 $N\tau\to\infty$ 时 $\varepsilon(N,\tau)\to 0$，我们易得：

定理1.3 在命题1.2假设条件下，由(4.11)(第三章)定义的AIM族$\{\phi_N\}_{N\in\mathcal{N}}$以$|.|_\infty$拓扑收敛到 ϕ，只要取$(\tau_N)_{N\in\mathcal{N}}$使得当 $N\to\infty$时，$N\tau_N\to\infty$.

注 1. ϕ_N 与 ϕ 间距离可用下式估计：

$$\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\varepsilon(k,\tau_k)\right)\sup_{y\in P_nE}|\phi(y)|_E \tag{1.6}$$

(1.6)收敛到零是缓慢的．这是因为其一，如同第三章§4所述，必须利用一次积分而且一步步地取分点的数量是递增的，同时常数 $\alpha_1(\lambda_n)$和 $\alpha_2(\lambda_n)$可以很大，一般地它们有 λ_n^r 类似的增长($r>0$).

2．如果我们以$(\mathrm{H}_4)'$和$(\mathrm{H}_5)'$代替(H_4)，(H_5)，可以得到对任何 $\psi\in\mathcal{F}_{b,l}$，有

$$\begin{aligned}&\max_{u_0=y_0+z_0\in\mathcal{A}}\left|T_N^\tau\psi(y_0)-\phi(y_0)\right|_E\\&\leqslant c_{11}\Big(\lambda_n^{\alpha-1}\max_{u_0=y_0+z_0\in\mathcal{A}}|\psi(y_0)-\phi(y_0)|_E\\&\quad+\tau(\beta_2\Lambda_n^{\alpha-1}+\beta_1\lambda_n^{-1})+\beta_2\Lambda_n^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-N\tau\Lambda_n}\Big)\end{aligned}$$

这就推得 $\mathrm{dist}_E(M_N,\mathcal{A})\ll(1.6)$.

下面我们证明在一些附加条件下，$(\phi_N)_{N\in\mathcal{N}}$以 C^1 拓扑收敛到 ϕ.

我们引入集合：

$$\mathcal{F}_l=\left\{\Delta:P_nE\to\mathcal{L}(P_nE,Q_nE);\sup_{y\in P_nE}|\Delta(y)|_{\mathcal{L}(P_nE,Q_nE)}\leqslant l\right\}$$

其中拓扑由下式给出：

$$|\Delta|_\infty=\sup_{y\in P_nE}|\Delta(y)|_{\mathcal{L}(P_nE,Q_nE)}$$

对任何 $\psi\in\mathcal{F}_{b,l}$定义映射 $T_\psi:\mathcal{F}_l\to\Delta\to T_\psi(\Delta)$：

$$\begin{aligned}T_\psi(\Delta)(y_0)\eta_0=&\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{As}Q_nDf(y(s)+\psi(y(s)))(\eta(s)\\&+\Delta(y(s))\eta(s))\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{1.7}$$

其中 y 是如下方程的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + Ay = P_n f(y + \psi(y)) \\ y(0) = y_0\end{cases} \tag{1.8}$$

而 η 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + A\eta = P_n Df(y + \psi(y))(\eta + \Delta(y)\eta) \\ \eta(0) = \eta_0\end{cases} \tag{1.9}$$

可以证明在定理 4.5(第三章)假设条件下，对每个 $\psi \in \mathscr{F}_{b,l}$，$T_\psi$ 映 $\mathscr{F}_l$ 到其自身，且关于 ψ 一致地严格压缩，因此应用纤维压缩定理推出 $\phi \in C^1$. 现在仿 T_N^τ 定义 T_ψ 的逼近：对于所有 $N \in \mathscr{N}$, $\tau > 0$ 和 $\psi \in \mathscr{F}_{b,l}$，定义在 $\mathscr{F}_l$ 上的 $T_{N,\psi}^\tau$ 如下：

$$\begin{aligned}\dot{T}_{N,\psi}^\tau(\Delta)(y_0)\eta_0 = {} & A^{-1}(I - \mathrm{e}^{-\tau A}) \\ & \times \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-k\tau A} Q_n Df(y_k + \psi(y_k))(\eta_k + \Delta(y_k)\eta_k) \\ & + A^{-1}\mathrm{e}^{-N\tau A} Q_n Df(y_N + \psi(y_N))(\eta_N + \Delta(y_N)\eta_N))\end{aligned}$$

其中 $(y_k)_{k=0,\cdots,N}$ 和 $(\eta_k)_{k=0,\cdots,N}$ 由下式计算：

$$y_{k+1} = R_\tau y_k + S_\tau P_n f(y_k + \psi(y_k)) \tag{1.10}$$

$$\eta_{k+1} = R_\tau \eta_k + S_\tau P_n Df(y_k + \psi(y_k))(\eta_k + \Delta(y_k)\eta_k) \tag{1.11}$$

如果 $(\phi_N)_{N \in \mathscr{N}}$ 是(4.11)定义的 AIM 族，即

$$\begin{cases}\phi_0 = 0 \\ \phi_{N+1} = T_N^{\tau_N} \phi_N \qquad N \geqslant 0\end{cases}$$

直接计算，有

$$D\phi_{N+1} = T_{N,\phi_N}^{\tau_N}(D\phi_N)$$

现在证明，在一些附加条件下，$T_{N,\psi}^\tau$ 在适当意义下靠近于 T_ψ，故此 $D\phi_N$ 逼近于 $D\phi$.

首先设 f 有有界支集，又设 $\forall\, \tau > 0, t \geqslant 0, y \in P_n E, z \in Q_n E$，

$$
(H_6)\qquad \begin{cases} |R_\tau y|_E \geqslant |y|_E \\ |e^{-A\tau}y|_E \leqslant |y|_E \\ |y+z|_E \geqslant |y|_E \end{cases}
$$

最后我们希望(1.10),(1.11)在如下意义下逼近(1.8),(1.9):假如 $\bar{y}(\bar{\eta})$在$(-\infty,0]$上以如下方式定义:在$(-(k+1)\tau,-k\tau]$上$\bar{y}=y_k(\bar{\eta}=\eta_k)$而在$(-\infty,-N\tau]$上 $\bar{y}=y_N(\bar{\eta}=\eta_N)$,则

(H_7):对所有 $T>0$,当 $\tau\to 0$ 和 $N\tau\to\infty$时,$\bar{y},\bar{\eta}$ 在$[-T,0]$上对于 P_nE 中任何有界集中的y_0,η_0一致地收敛于(1.8),(1.9)的解 y,η.

定理 1.4 假如定理 1.3 的假设,(H_6),(H_7)成立,如果 f 有紧支集且Df一致连续,则$(\phi_N)_{N\in\mathcal{N}}$族当 $\tau_N\to 0$ 和 $N\tau_N\to\infty$时以 C^1 拓扑收敛到 ϕ.

证明 由定理 1.3 知,在 P_nE 的有界集上 ϕ_N 一致收敛到ϕ.令 B 是E 中包含f 支集的球,R_1 是其半径,任取 $y_0\in P_nE$ 使得

$$
|y_0|_E \geqslant R_1
$$

则(H_6)推得:当 y 是(4.7)(第三章)的解且$(y_k)_{k=0,\cdots,N}$如前所定义时,有

$$
|y(s)|_E \geqslant R_1,\quad \forall s\leqslant 0
$$
$$
|y_k|_E \geqslant R_1,\quad k=0,1,\cdots,N
$$

现在由

$$
\psi(y_0)=\int_{-\infty}^{0} e^{As}Q_nf(y(s)+\psi(y(s)))ds
$$

和

$$
T_N^\tau\psi(y_0)=A^{-1}(I-e^{-A\tau})\sum_{k=0}^{N-1}e^{-kA\tau}Q_nf(y_k+\psi(y_k))
$$
$$
+A^{-1}e^{-NA\tau}Q_nf(y_N+\psi(y_N))
$$

推出 $\phi(y_0)=0$,$\phi_N(y_0)=0$(上式中取 $\psi=\phi$),因此对所有 N,$\operatorname{supp}\phi_N\subset B$ 且推得在P_nE 上ϕ_N一致收敛到ϕ. 又

$$
D\phi_{N+1}-D\phi=T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi_N)-T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi)
$$

$$+ T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi) - T_\phi(D\phi) \tag{1.12}$$

利用定理 1.3 证明中同样思想，可以得到

$$\left| T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi_N) - T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi) \right|_\infty \leqslant \frac{1}{2} | D\phi_N - D\phi |_\infty \tag{1.13}$$

对所有 $y_0, \eta_0 \in P_n E$，且 $|\eta_0| = 1$. 令 $(y_k)_{k=0,\cdots,N}$ 和 $(\eta_k)_{k=0,\cdots,N}$ (分别地 $(y_k^N)_{k=0,\cdots,N}$ 和 $(\eta_k^N)_{k=0,\cdots,N}$) 由 (1.10), (1.11) 定义，其中 $\psi=\phi$ 和 $\Delta = D\phi$ (分别地 $\psi = \phi_N, \Delta = D\phi_N$)，且如 (H_7) 所定义 $\bar{y}, \bar{\eta}$ (分别地 $\bar{y}^N, \bar{\eta}^N$)，如果 y, η 是 (1.8), (1.9) 的解，其中 $\psi=\phi$ 和 $\Delta = D\phi$，则

$$\begin{aligned} & T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi)(y_0)\eta_0 - T_\phi(D\phi)(y_0)\eta_0 \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{As} Q_n (Df(\bar{y}^N(s) + \phi_N(\bar{y}^N(s)))(\bar{\eta}^N(s) \\ &\quad + D\phi(\bar{y}^N(s))\bar{\eta}^N(s)) - Df(y(s) \\ &\quad + \phi(y(s)))(\eta(s) + D\phi(y(s))\eta(s)))\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{1.14}$$

如果 $|y_0|_E > R_1$，同前所证，有

$$T_\phi(D\phi)(y_0)\eta_0 = T^{\tau_N}_{N,\phi_N}(D\phi)(y_0) = 0$$

可以找到常数 c'_5 使得 (1.14) 被积函数为下式所控制：

$$c'_5\left(\frac{1}{|s|^\alpha} + \Lambda_n^\alpha\right) |\eta_0|_E e^{(\Lambda_n - \lambda_n - K_2 M_1 (1+l)\lambda_n^\alpha)s}$$

因此这个积分关于 y_0 和 η_0, ($|\eta_0|_E = 1$) 是一致收敛的．对任何 $\varepsilon > 0$，存在与 y_0, η_0 无关的 T 使得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-T} | e^{As} Q_n (Df(\bar{y}^N(s) + \phi_N(\bar{y}^N(s)))(\bar{\eta}^N(s) \\ &\quad + D\phi(\bar{y}^N(s))\bar{\eta}^N(s)) - Df(y(s) + \phi(y(s)))(\eta(s) \\ &\quad + D\phi(y(s))\eta(s)))|_E \mathrm{d}s \leqslant \varepsilon/2 \end{aligned}$$

(1.14) 的其余部分分成 I_1 与 I_2 的和：

$$I_1 = \int_{-T}^{0} e^{As} Q_n (Df(\bar{y}^N(s) + \phi_N(\bar{y}^N(s)))(\bar{\eta}^N(s)$$

$$+ D\phi(\bar{y}^N(s))\bar{\eta}^N(s))$$
$$- Df(\bar{y}(s) + \phi(\bar{y}(s)))(\bar{\eta}(s) + D\phi(\bar{y}(s))\bar{\eta}(s)))\mathrm{d}s$$

和

$$I_2 = \int_{-T}^{0} e^{As} Q_n (Df(\bar{y}(s) + \phi(\bar{y}(s)))(\bar{y}(s) + D\phi(\bar{y}(s))\bar{\eta}(s)) - Df(y(s) + \phi(y(s)))(\eta(s) + D\phi(y(s))\eta(s)))\mathrm{d}s$$

在命题 1.1 的证明中已证存在仅与 T 和 n 有关的常数 $c'_6(T,n)$ 使得

$$|\bar{y}(s) - \bar{y}^N(s)|_E \leqslant c'_6(T,n)|\phi_N - \phi|_\infty(1 + |y_0|_E) \leqslant c'_6(T,n)(1 + R_1)|\phi_N - \phi|_\infty \quad (1.15)$$

又,我们可以找到一个与 n, R_1 和 T 有关的有界集 B_T 使得对所有 $s \in [-T,0]$, $\bar{y}(s)$ 和 $\bar{y}^N(s)$ 仍在 B_T 中,则对任何 $\alpha > 0$,我们定义

$$M_1(\alpha) = \sup_{|x-y|_E \leqslant \alpha} |Df(x) - Df(y)|_{\mathscr{L}(E,F)}$$
$$M_2(\alpha) = \sup_{\substack{x,y \in B_T \\ |x-y|_E \leqslant \alpha}} |D\phi(x) - D\phi(y)|_{\mathscr{L}(E)}$$

则如果选取 α_n 使得

$$|\bar{y}^N(s) - \bar{y}(s)|_E + |\phi(\bar{y}(s)) - \phi^N(\bar{y}^N(s))|_E \leqslant \alpha_N,$$
$$\forall s \in [-T,0], |y_0|_E \leqslant R_1,$$

我们可以证明存在 $c'_7(T,n)$ 使得

$$|\bar{\eta}^N(s) - \bar{\eta}(s)|_E \leqslant c'_7(T,n)(M_1(\alpha_n) + M_2(\alpha_n)) \quad (1.16)$$

对所有 $s \in [-T,0]$, $|y_0|_E \leqslant R_1$ 和 $|\eta_0|_E = 1$ 成立．现在,(1.15),(1.16),在 P_nE 上 Df 和 B_T 上 $D\phi$ 的一致连续性表明 I_1 关于 y_0, η_0 一致收敛到零,其中 $|y_0|_E \leqslant R_1$ 和 $|\eta_0|_E = 1$. 由 (H_7), I_2 关于同样的 y_0, η_0 也一致收敛到零．

因此 $T_{N,\phi_N}^{\tau_N}(D\phi)(y_0)\eta_0 - T_\phi(D\phi)(y_0)\eta_0$ 关于 y_0, η_0 一致收敛到零(当 $|y_0|_E \leqslant R_1$ 而 $|\eta_0|_E = 1$),而如 $|y_0|_E > R_1$,它也是零,

因而

$$\left| T_{N,\phi_N}^{\tau_N}(D\phi_N) - T_\phi(D\phi) \right|_\infty \to 0, \quad 当 N \to \infty$$

由(1.12)就推得

$$|D\phi - D\phi_N|_\infty \to 0 \qquad 当 N \to \infty, \quad 证毕.$$

§2 强收缩性和锥不变性

从本节开始我们从谱间隙条件出发,研究半群 $S(t)$的一些重要性质,然后利用这些性质从另一途径证明 ϕ_N 的收敛性 . 本节给出谱间隙条件下 $S(t)$的几个重要性质 .

我们研究第二章中讨论的方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + R(u) = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $R(u)$是可微映射:$D(A)\to D(A^{1-\beta}), 0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{1}{2}$,且满足:

$$\begin{cases} |R'(u)v| \leqslant M_0(|Au|)|A^\beta v| \\ |A^{1-\beta}R'(u)v| \leqslant M_1(|Au|)|Av| \end{cases} \forall u,v \in D(A) \tag{2.2}$$

设对每个 $u_0\in D(A)$,(2.1)有唯一整体解 $u(t)=S(t)u_0\in D(A)$, $\forall t\geqslant 0$;且在 $D(A)$空间存在吸收球 $B(0,\rho_0)$,记 $M_2=2\rho_0$,于是运用截断函数技巧,将(2.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + F(u) = f \tag{2.3}$$

利用第二章§1同样技巧,可以得到:

$$\begin{aligned} &|A^{1-\beta}F(u)| \leqslant k_1 \\ &|A^{1-\beta}F'(u)v| \leqslant k_2|Av| \qquad \forall u,v \in D(A) \\ &|A^{1-\beta}(F(u_1) - F(u_2))| \leqslant k_2|A(u_1 - u_2)| \\ &\qquad\qquad u_1, u_2 \in D(A) \end{aligned} \tag{2.4}$$

同第二章记 P 是到线性无界正算子 A 的前 N 个特征向量张成空间上正交投影，$Q=I-P$，给定 $\gamma>0$，记 $\Gamma_N(\gamma)$是 $D(A)\times D(A)$ 空间的锥：

$$\Gamma_N(\gamma)=\begin{cases}[u_1,u_2];u_1,u_2\in D(A)\\ |QA(u_1-u_2)|\leqslant\gamma|PA(u_1-u_2)|\end{cases}\tag{2.5}$$

定理 2.1 设 u_1,u_2 是(2.3)的两个解，且 $|Au_i|\leqslant M_2$ 对 $i=1,2$ 和 $t\geqslant0$，且 $f\in H$，($L^2(\Omega)$空间)设 N 满足：

$$\lambda_{N+1}^{1-\beta}>2k_2(1+\gamma^{-1})$$

$$\lambda_{N+1}-\lambda_N>k_2((1+\gamma)\lambda_N^\beta+(1+\gamma^{-1})\lambda_{N+1}^\beta)\tag{2.6}$$

则下面两个结论成立：

(1)(锥不变性)：如果$[u_1(t_0),u_2(t_0)]\in\Gamma_N(\gamma)$，对某个 $t_0\geqslant0$，则对所有 $t\geqslant t_0$，有$[u_1(t),u_2(t)]\in\Gamma_N(\gamma)$

(2)(强收缩性)：如果$[u_1(t),u_2(t)]\notin\Gamma_N(\gamma)$，$0\leqslant t\leqslant T$，则对所有 $0\leqslant t\leqslant T$，有

$$|QA(u_1(t)-u_2(t))|\leqslant|QA(u_1(0)-u_2(0))|\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}t/2}$$

证明 由于 $f\in H$，我们用 Galerkin 逼近法证明．记 $u_{i,n}$是如下方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}u_{i,n}}{\mathrm{d}t}+Au_{i,n}+P_nF(u_{i,n})=P_nf\tag{2.7}$$

$u_{i,u}(t_0)=P_nu_i(0)$，$i=1,2$. $n>N$，由于 $u_{i,n}(t_0)$是 $u_i(t_0)$的逼近，故有当 $n\to\infty$时，$|A(u_{i,n}(t_0)-u_i(t_0))|\to0$.

令 $V_n(t)=|AQ(u_{1,n}(t)-u_{2,n}(t))|-\gamma|AP(u_{1,n}(t)-u_{2,n}(t))|$，我们首先证明若 $u_{1,n},u_{2,n}$是(2.7)两个不同的解，且如果 $V_n(t_1)=0$，对某个 $t_1\geqslant t_0$ 成立，则有$\frac{\mathrm{d}V_n(t_1)}{\mathrm{d}t}<0$.

令

$$\Delta=Q(u_1(t)-u_2(t)),\delta=P(u_1(t)-u_2(t))$$

$$\Delta_n=Q(u_{1,n}(t)-u_{2,n}(t)),\delta_n=P((u_{1,n}(t)-u_{2,n}(t))$$

由(2.7)

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_n}{\mathrm{d}t} + A\Delta_n + R_n(F(u_{1,n}) - F(u_{2,n})) = 0 \tag{2.8}$$

其中 $R_n = P_n Q$;将(2.8)与 $A^2\Delta_n$ 取内积得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta_n|^2 + |A^{3/2}\Delta_n|^2 \\
&\leqslant |(R_n A^{1-\beta}(F(u_{1,n}) - F(u_{2,n})), A^{1+\beta}\Delta_n)| \\
&\leqslant k_2 |A(u_{1,n} - u_{2,n})| \lambda_{N+1}^{\beta-\frac{1}{2}} |A^{3/2}\Delta_n| \\
&\leqslant k_2(|A\Delta_n| + |A\delta_n|)\lambda_{N+1}^{\beta-\frac{1}{2}} |A^{3/2}\Delta_n|
\end{aligned}$$

利用 $V_n(t_1)=0$,则在 $t=t_1$,有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta_n|^2 + |A^{3/2}\Delta_n|^2 &\leqslant k_2(1+\gamma^{-1})|A\Delta_n|\lambda_{N+1}^{\beta-\frac{1}{2}}|A^{3/2}\Delta_n| \\
&\leqslant \frac{k_2(1+\gamma^{-1})}{\lambda_{N+1}^{1-\beta}}|A^{3/2}\Delta_n|^2
\end{aligned}$$

利用(2.6),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\Delta_n| + \lambda_{N+1}\left(1 - \frac{k_2(1+\gamma^{-1})}{\lambda_{N+1}^{1-\beta}}\right)|A\Delta_n| \leqslant 0 \tag{2.9}$$

对 δ_n 项类似有,在 $t=t_1$ 处

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\delta_n|^2 + |A^{3/2}\delta_n|^2 \geqslant - k_2(1+\gamma)|A\delta_n|\,|A^{1+\beta}\delta_n|$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A\delta_n| + \lambda_N|A\delta_n| \geqslant - k_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}|A\delta_n| \tag{2.10}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|A\Delta_n| - \gamma|A\delta_n|) \\
&\leqslant [\lambda_N - \lambda_{N+1} + k_2((1+\gamma)\lambda_N^{\beta} + (1+\gamma^{-1})\lambda_{N+1}^{\beta}]|A\Delta_n|
\end{aligned}$$

利用(2.6),有

$$\frac{\mathrm{d}V_n(t_1)}{\mathrm{d}t} < 0$$

由上式推知,若 $V_n(t_0)\leqslant 0$,则 $\forall\, t \geqslant t_0, V_n(t) \leqslant 0$.

给定 $\tau > t_0$，由(2.4)，(2.7)通过能量估计，有

$$\sup_{t_0 \leqslant t \leqslant \tau} |Au_{i,n}(t)| \leqslant c_1$$

$$\int_{t_0}^{\tau} |A^{3/2}u_{i,n}(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant c_2$$

$$\int_{t_0}^{\tau} \left| A^{1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{i,n}(t) \right|^2 \mathrm{d}t \leqslant c_3$$

其中 c_j 仅与 τ 和 $|Au_i(t_0)|$ 有关，由紧致性定理推得存在子列 $n_k \to \infty$ 使得：

$u_{i,n_k} \longrightarrow u_i$，在 $L^2(0,\tau;D(A^{3/2}))$ 中弱

$u_{i,n_k} \longrightarrow u_i$，在 $L^2(0,\tau;D(A))$ 中强

$u_{i,n_k} \longrightarrow u_i$，在 $L^\infty(0,\tau;D(A^{1/2}))$ 中强

$u_{i,n_k} \longrightarrow u_i$，在 $D(A)$ 中弱，在 $[t_0,\tau]$ 中点点收敛．

由解的唯一性推出上述收敛对整个序列也正确．

由设 $|AQ(u_1(t_0) - u_2(t_0))| \leqslant \gamma |AP(u_1(t_0) - u_2(t_0))|$，于是对所有 $n > N$，

$$|A\Delta_n(t_0)| \leqslant |A\Delta(t_0)| \leqslant \gamma |A\delta(t_0)| = \gamma |A\delta_n(t_0)|$$

因此，$V_n(t_0) \leqslant 0$ 和所有 $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$，$n > N$，有 $V_n(t) \leqslant 0$，特别对 $n_k > N$，所有 $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$，有 $|A\Delta_{n_k}(t)| - \gamma |A\delta_{n_k}(t)| \leqslant 0$.

由于 $|A\Delta_{n_k}(t)|$ 在 $D(A)$ 中弱收敛，在 $[t_0,\tau]$ 中点点收敛，我们有

$$|A\Delta(t)| \leqslant \liminf_{n_k \to \infty} |A\Delta_{n_k}(t)|$$

$$\leqslant \limsup_{n_k \to \infty} \gamma |A\delta_{n_k}(t)| = \gamma |A\delta(t)|$$

$\forall\, t_0 \leqslant t \leqslant \tau$ 成立．上述右边的极限已利用 Galerkin 解在 $L^\infty(0,\tau;D(A^{1/2}))$ 中强收敛，而由于 $\delta(t)$ 和 $\delta_{n_k}(t)$ 均位于有限维空间 PH，故收敛以 $D(A)$ 范也成立．

为证(2)，仍考虑(2.7)，其中始值 $u_{i,n}(0) = P_n u_i(0)$ 且 $n > N$，由于 $|A\Delta(0)| > \gamma |A\delta(0)|$，于是对充分大的 n，有

$$|A\Delta_n(0)| > \gamma |A\delta_n(0)|$$

由于(2.7)的解关于 t 连续,对每个充分大的 n,存在 $T_n>0$ 使得 $|A\Delta_n(t)|>\gamma|A\delta_n(t)|$, $\forall 0\leqslant t\leqslant T_n$,记

$$\overline{T}_n = \sup\{T_n : |A\Delta_n(t)| > \gamma|A\delta_n(t)|, \forall t \in [0, T_n]\}$$

于是(2.9)在$[0,\overline{T}_n)$中成立,利用 Gronwall 不等式,得到

$$|A\Delta_n(t)| \leqslant |A\Delta(0)| e^{-\lambda_{n+1}t/2} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \overline{T}_n$$

其中已利用条件(2.6).

现在我们断言 $T\leqslant\overline{T} = \lim\inf_{n\to\infty}\overline{T}_n$. 假设不正确,即 $T>\overline{T}$,则存在子列 n_k 使得 $T>\overline{T}_{n_k}$,因此我们有 $\left|A\Delta_{n_k}(T)\right|\leqslant\gamma\left|A\delta_{n_k}(T)\right|$,则如前所证

$$\begin{aligned}|A\Delta(T)| &\leqslant \lim\inf_{n_k\to\infty}\left|A\Delta_{n_k}(T)\right| \\ &\leqslant \gamma\lim\sup\left|A\delta_{n_k}(T)\right| = \gamma|A\delta(T)|\end{aligned}$$

这推得$[u_1(T),u_2(T)]\in\Gamma_N(\gamma)$,矛盾于(2)中假设．由这推得对于 n 充分大,我们有

$$|A\Delta_n(t)| \leqslant |A\Delta(0)| e^{-\lambda_{N+1}t/2} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \leqslant T_n$$

取下极限,推出

$$\begin{aligned}|A\Delta(t)| &\leqslant \lim\inf_{n\to\infty}|A\Delta_n(t)| \\ &\leqslant |A\Delta(0)| e^{-\lambda_{N+1}t/2}, \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T\end{aligned}$$

注1 如果 $f\in D(A^{1-\beta})$,这时可证明$\frac{du}{dt}\in D(A^{1-\beta})$,和 $u\in D(A^{2-\beta})$, $\forall t>0$;从而不必通过 Galerkin 逼近而直接证明结论．

注2 如果我们定义锥 $\Gamma_N^{\beta/2}(\gamma)=\{[u_1,u_2];u_1,u_2\in D(A^{\beta/2}),|Q_NA^{\beta/2}(u_1-u_2)|\leqslant\gamma|P_NA^{\beta/2}(u_1-u_2)|\}$,则在 $\lambda_{N+1}-\lambda_N>3k_2(1+\gamma+\gamma^{-1})(\lambda_{N+1}^{\beta}+\lambda_N^{\beta})$条件下,锥不变性和强收缩性成立．

我们设谱间隙条件(2.6)成立,对(2.3)存在惯性流形 $\mu=\text{graph}(\phi(p))$,且 $\phi\in\mathscr{F}_{b,l}$,设 $b=\frac{\rho_0}{4}$; $0<l\leqslant\frac{1}{32}$, $\gamma>1$,对 $u\in$

$D(A)$，引入集合 $\Sigma(u)$：

$$\Sigma(u)=P\{v\in D(A),|AQ(v-u)|=\gamma|AP(v-u)|,\text{和 }Qv=\phi(Pv)\}\tag{2.11}$$

由定义知 $v\in\mu$，于是 $\Sigma(u)$是惯性流形 μ 的一个子集在P 投影下的像．

命题 2.2 设 $u\in D(A)$，$|Au|<2M_2$，$Qu\neq\phi(Pu)$，则 $\Sigma(u)$同构于 $P_ND(A)$的一个单位球面 S^{N-1}，即存在一个同构 $h(u,\cdot):S^{N-1}\to\Sigma(u)$，此外，对每个 $u_1,u_2\in D(A)$，$|Au_i|<M_2$，$Qu_i\neq\phi(Pu_i)$，$i=1,2$ 和对每一个 $w_1,w_2\in S^{N-1}$有

$$|A(h(u_1,w_1)-h(u_2,w_2))|\leqslant K_1|A(w_1-w_2)|+K_2|A(u_1-u_2)|\tag{2.12}$$

其中 $K_1=2M_2\gamma^{-1}(\gamma-l)^{-1}$，$K_2=l\sqrt{2}(\gamma-l)^{-1}+1$．

证明 设 $u\in D(A)$，$|Au|<2M_2$，$Qu\neq\phi(Pu)$，可以证明 $\forall w\in S^{N-1}$，存在 $r>0$ 使得

$$|A(\phi(rw+Pu)-Qu)|=\gamma r\tag{2.13}$$

事实上，如果(2.13)不正确．因为 $Qu\neq\phi(Pu)$，有

$$|A(\phi(rw+Pu)-Qu)|>\gamma r$$

$r=0$ 时，上式成立，设 $\forall r\geqslant 0$ 上式均正确，则 $|A(\phi(rw+Pu)-\phi(Pu))|+|A(\phi(Pu)-Qu)|>\gamma r$，$\forall r\geqslant 0$. 又 $\phi\in\mathscr{F}_{b,l}$，有

$$lr+|A(\phi(Pu)-Qu)|>\gamma r,\quad\forall r\geqslant 0\tag{2.14}$$

推知$|A(\phi(Pu)-Qu)|>(\gamma-l)r$，因 $\forall r\geqslant 0$ 成立，推出矛盾．(已利用 $r>1$)这证明了(2.13)成立．利用 ϕ 和 Qu，有

$$0<\gamma r\leqslant b+M_2<2M_2\tag{2.15}$$

于是

$$|A(\phi(r_kw_k+Pu_k)-Qu_k)|=\gamma r_k,k=1,2$$

从而

$$\gamma|r_1-r_2|=|A(\phi(r_1w_1+Pu_1)-Qu_1)|$$

$$
\begin{aligned}
& - |A(\phi(r_2w_2 + Pu_2) - Qu_2)| \\
\leqslant & |A(\phi(r_1w_1 + Pu_1) - \phi(r_2w_2 + Pu_2))| \\
& + |AQ(u_1 - u_2)| \\
\leqslant & l[|A(r_1w_1 - r_2w_2)| \\
& + |AP(u_1 - u_2)|] + |AQ(u_1 - u_2)| \\
\leqslant & lr_1|A(w_1 - w_2)| + l|r_1 - r_2| \\
& + \sqrt{2}l|A(u_1 - u_2)|
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
(\gamma - l)|r_1 - r_2| \leqslant & 2M_2\gamma^{-1}l|A(w_1 - w_2)| \\
& + \sqrt{2}l|A(u_1 - u_2)| \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

从(2.13)得到 $r = r(u, w)$，从(2.16)得到 r 是 u, w 的连续函数，且是唯一的．

定义

$$
\begin{aligned}
& h(u, w) = Pu + r(u, w) \cdot w \\
& \forall w \in S^{N-1}, u \in D(A), |Au| < M_2 \\
& Qu \neq \phi(Pu) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

则 $h(u, w)$是连续函数，且对每个 $u, h(u, \cdot)$有一连续逆，这是由于 S^{N-1}紧，又(2.15)表明 $r(u, \cdot)$有正的下确界，因此从(2.13)，$\phi(h(u, w)) - Qu \neq 0$，$\forall w \in S^{N-1}$，因而对 $\eta \in \Sigma(u)$，注意 $Pu + r(u, w)w \in \Sigma(u)$（从(2.13)推知）．由 $\eta = Pu + r(u, w)w$，推得 $w = \frac{\eta - Pu}{r} = \frac{\gamma(\eta - Pu)}{|A(\phi(\eta) - Qu)|} = h^{-1}(u, \eta)$．$\forall \eta \in \Sigma(u)$，$h^{-1}(u, \cdot)$是连续函数．由(2.16)，(2.17)推出(2.12)．

注 1　在命题 2.2 中若定义

$$
\begin{aligned}
\Sigma(u) = P\{ & v \in D(A), |A^{\beta/2}Q(v - u)| \\
& = \gamma|A^{\beta/2}P(v - u)| \text{ 和 } Qv = \phi(Pv)\}
\end{aligned}
$$

则命题结论仍正确，其中(2.12)由下式代替：

$$|A^{\beta/2}(h(u_1,w_1)-h(u_2,w_2))|$$
$$\leqslant K_1|A^{\beta/2}(w_1-w_2)|+K_2|A^{\beta/2}(u_1-u_2)|$$

其中 $K_1=2M_2\gamma^{-1}(\gamma-l)^{-1}\lambda_{N+1}^{\beta/2-1}$, $K_2=l\sqrt{2}(\gamma-l)^{-1}+1$.
证明方法完全类似.

从定理 2.1 和关于 $F(u)$的假设知 $S(t)u_0$ 关于 u_0 是 Frechet 可微的,即$\frac{\mathrm{D}S(t)u_0}{\mathrm{D}u_0}:=S'(t,u_0)$存在,且 $S'(t,u_0)\mu_0=\mu(t)$是如下方程的解:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+A\mu+F'(S(t)u_0)\mu=0$$
$$\mu(0)=\mu_0 \tag{2.18}$$

于是由定理 2.1 得到

推论 2.3 如果 $|QA\mu(0)|\leqslant\gamma|PA\mu(0)|$,则 $\forall t\geqslant0$,有 $|QA\mu(t)|\leqslant\gamma|PA\mu(t)|$.

下面我们给出锥不变性的一个应用:

命题2.4 对每个 $\tau\geqslant0$,存在函数 $\chi(\tau,p):PH\rightarrow QD(A)$,使得 $M_\tau=\mathrm{graph}(\chi(\tau,\cdot))$

$$|A(\chi(\tau,p_1)-\chi(\tau,p_2))|\leqslant\gamma|A(p_1-p_2)| \tag{2.19}$$

$\forall p_1,p_2\in PH$,且 $\chi(0,p)=\psi_0$,ψ_0 满足

$$\sup_{p\in PH}|AD\psi_0(p)|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\leqslant\gamma \tag{2.20}$$

证明 我们以如下方式定义映射:对每个 $\tau_0>0,p_0\in PH$,对某个 $p_1\in PH$,我们有 $p_0=P(S(\tau_0)(p_1+\psi_0(p_1)))$. 我们用如下方法证明 p_1 的存在性:

令 $g(p)=-PS(\tau_0)(p+\psi_0(p))+p_0$,则 $g:PH\rightarrow PH$ 连续;此外,当 p 充分大,$|Ap|\geqslant2\mathrm{e}^{\lambda_N\tau_0}\max\{|Ap_0|,4\rho_0\}$时,我们有方程中 $F=0$,故

$$\begin{aligned}(g(p),p)&=-(P(S(\tau_0)p),p)+(p_0,p)\\&=-(\mathrm{e}^{-PA\tau_0/2}p,\mathrm{e}^{-PA\tau_0/2}p)+(p,p_0)\\&\leqslant-|\mathrm{e}^{-PA\tau_0/2}p|^2+|p||p_0|\leqslant-\mathrm{e}^{-\lambda_N\tau_0}|p|^2+|p||p_0|\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{(g(p),p)}{|p|}=-\infty$$

故在充分大的球边界上有$(g(p),p)<0$,从而在球内至少有一个零点 $g(p_1)=0$,即 $p_0=PS(\tau_0)(p_1+\psi_0(p_1))$.

令

$$\chi(\tau_0,p_0)=Q(S(\tau_0)(p_1+\psi_0(p_1)))$$

χ 是适定的,且在锥 $\Gamma_N(\gamma)$内唯一 . 事实上,如果存在 p_1,p_2 使

$$P(S(\tau_0)(p_1+\psi_0(p_1)))=P(S(\tau_0)(p_2+\psi_0(p_2))) \tag{2.21}$$

则令 $u_i(t)=S(t)(p_i+\psi_0(p_i))$,利用 ψ_0 假设,在 $t=0$ 时有

$$\begin{aligned}|QA(u_1(0)-u_2(0))|&=|A(\psi_0(p_1)-\psi_0(p_2))|\\&\leqslant\gamma|PA(p_1-p_2)|\\&=\gamma|PA(u_1(0)-u_2(0))|\end{aligned}$$

由锥不变性得到 $\forall t\geqslant 0$, $|QA(u_1(t)-u_2(t))|\leqslant\gamma|PA(u_1(t)-u_2(t))|$特别在 $t=\tau_0$ 时成立 . 但由(2.21),上式右边为零,故 $|QA(u_1(\tau_0)-u_2(\tau_0))|\leqslant 0$,这表明 $u_1(\tau_0)=u_2(\tau_0)$(结合(2.21)). 从而$\forall t\geqslant 0$ 和 $p_1=p_2$,由逆向唯一性得知 $u_1(t)=u_2(t)$,从 χ 定义立刻得到(2.19).

注 1 由命题推知,若 $u_1(t),u_2(t)$不在锥 $\Gamma_N(\gamma)$中,则对 $\tau>0$,有 $p=PS(\tau)(p_1+\psi_0(p_1))=PS(\tau)(p_2+\phi(p_2))$,其中 $\mu=\mathrm{graph}(\phi(p))$, $p_i=Pu_i$;

注 2 由命题证明知,对于任何函数,只要在相空间的图像满足(2.20),命题 2.4 仍成立 .

§3 AIM 的 C^0 收敛性

方程(2.1)正交投影到 PH,QH 空间,我们得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+Ap+PF(p(t)+q(t))=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Aq + QF(p(t) + q(t)) = 0 \tag{3.2}$$

为方便起见,我们已将 f 包含在 F 中,$f \in H$. 对于 IM 上任何解,我们有

$$q(t) = \Phi(p(t)) \tag{3.3}$$

其中 p,q 如§2所设,即 $Pu(t)=p, Qu(t)=q$;微分(3.3)并利用(3.1),(3.2)有

$$\begin{aligned} -A\Phi(p) - QF(p + \Phi(p)) &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = D\Phi \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ &= -D\Phi(Ap + PF(p + \Phi(p))) \end{aligned}$$

即

$$A\Phi - D\Phi(Ap + PF(p + \Phi(p))) + QF(p + \Phi(p)) = 0 \tag{3.4}$$

其中 $\mathrm{supp}\Phi \subset B(0, 4\rho_0)$, ρ_0 为(2.1)在 $D(A)$空间吸收球半径. 在某种意义上说 Φ 支集条件就是 Φ 的一种边界条件,而如果 Φ 是(3.4)的解,则 $\mu = \mathrm{graph}(\Phi)$就是(2.1)的不变流形.

我们利用构造一类无穷维阻尼双曲组的解来逼近(3.4)的解,并证明其收敛到 IMΦ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi(\tau, p)}{\partial \tau} + A\Psi(\tau, p) \\ \qquad - D\Psi(\tau, p)(AP + PF(p + \Psi(\tau, p))) \\ \qquad + QF(p + \Psi(\tau, p)) = 0 \\ \Psi(0, p) = \Psi_0(p) \end{cases} \tag{3.5}$$

$\Psi_0(p)$满足假设:是 C^1 映射:$PH \to QD(A)$,且

$$\sup_{p \in H} \| AD\Psi_0(p) \|_{\mathscr{L}(PH, QH)} \leqslant \gamma \tag{3.6}$$

同时有 $\mathrm{supp}\Psi_0 \subset B(0, 4\rho_0)$.

由于我们不能期望阻尼项 $A\Psi$ 能够去控制梯度项 $D\Psi$,故给出初始值的 C^1 范"小值"条件(3,6),以防止出现震荡. 注意 Φ 是(3.5)的稳态解,只要 Ψ_0 满足(3.6),则 Ψ 指数地收敛到 Φ,我们用特征方法证明(3.5)有唯一整体解,特别需要谱间隙条件以避免

由时间发展而引起的震荡．更确切地讲，我们将证明对(3.5)，利用 Hadamard 方法构造的解，从一开始就充分接近 IM，并进而指数地逼近于 IM．

对于(3.5)的特征方程是

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=1$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-AP-PF(p+\overline{\psi}) \tag{3.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\psi}}{\mathrm{d}t}=-A\overline{\psi}-QF(p+\overline{\psi}) \tag{3.8}$$

其中 $\tau=\tau(t,p_0)$，$p=p(t,p_0)$，$\overline{\psi}=\overline{\psi}(t,p_0)$，具有始值条件：$\tau(0,p_0)=0$；$p(0,p_0)=p_0$；$\overline{\psi}(0,p_0)=\overline{\psi}_0(p_0)$，对任何 $p_0\in PH$．在求解出这些方程后，我们用隐函数定理于 $\tau(t,p_0)$ 和 $p(t,p_0)$ 的逆以得到 $t=t(\tau,p_0)$，$p_0=p_0(\tau,p)$，代入 $\overline{\psi}(t,p_0)=\overline{\psi}(t(\tau,p_0),p_0(\tau,p))$，它正是(3.5)的解，而这些特征方程的解也正是(2.1)的轨道 $S(t)u_0$，$u_0\in\mathrm{graph}(\overline{\psi}_0)$；另一方面，对任何形式为 $u(t)=S(\tau)(p_0+\overline{\psi}_0(p_0))$ 的轨道，由 χ 定义和命题 2.3，$\chi(\tau,Pu(\tau))=Qu(\tau)$，因此，只要 $\overline{\psi}(\tau,p)$ 由特征方法如上所定义，则有 $\chi(\tau,p)=\overline{\psi}(\tau,p)$，$\overline{\psi}(\tau,p)$ 对所有 $\tau\geqslant 0$ 有定义．因此要证 $\chi(\tau,p)$ 是(3.5)的古典整体解就等价于要证函数 $\tau=\tau(t,p_0)$，$p=p(t,p_0)$ 的可逆性，由于 $t(\tau,p_0)=t$，故为达到目的，只须研究算子 $\rho_{0,p}:\dfrac{\partial p(t,p_0)}{\partial p_0}$ 的可逆性．为此，研究(3.7)，(3.8)的线性化方程：

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{0,p}}{\mathrm{d}t}+A\rho_{0p}+PDF(u)(\rho_{0p}+\sigma_{0p})=0$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{0p}}{\mathrm{d}t}+A\sigma_{0p}+QDF(u)(\rho_{0p}+\sigma_{0p})=0 \tag{3.9}$$

其中 $\sigma_{0p}=\dfrac{\partial\overline{\psi}(t,p_0)}{\partial p_0}$，$u(t,p_0)=p(t,p_0)+\overline{\psi}(t,p_0)$ 且 $p(t,p_0)$，$\overline{\psi}(t,p_0)$ 是(3.7)，(3.8)的解，等价地，$u(t,p_0)$ 是(2.1)始值

在 graph($\overline{\psi}_0$)上的解，即 $u(0,p_0)=p_0+\overline{\psi}_0(p_0)$.

定理3.1 设$\overline{\psi}_0$ 满足(3.6)，则(3.5)有一个解$\overline{\psi}(\tau,p)$，关于 τ,p 是整体的，且它关于 p 的 Frechet 微分满足：

$$\| AD\overline{\psi}(\tau,p)\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\leqslant\gamma,\quad \forall\tau\geqslant 0 \qquad (3.10)$$

证明 由上面讨论知只须证明 $\rho_{0p}(t,p_0)$关于每个 t 和 $p_0\in PH$ 是可逆的，这就保证了 $p(t,p_0)$的整体可逆性．由始值条件：$p(0,p_0)=p_0$，从而 $\rho_{0p}(0,p_0)=PI$，它在 PH 上恒等性就保证了 $\forall p_0\in PH$ 和 $0\leqslant t\leqslant T(p_0)$（某个 $T(p_0)>0$）有 $p(t,p_0)$可逆性．反证 $p(t,p_0)$的可逆性．假设对某个 $t_0>0,p_0\in PH$，矩阵 $\rho_{0p}(t_0,p_0)$是奇异的，从而存在 $\xi\in PH,\xi\neq 0$，使得 $\rho_{0p}(t_0,p_0)\xi=0$. 令 $\rho(t,p_0)=\rho_{0p}(t,p_0)\xi,\sigma(t,p_0)=\sigma_{0p}(t,p_0)\xi,\mu(t,p_0)=\rho(t,p_0)+\sigma(t,p_0)$，注意 $\mu(t,p_0)$满足(2.18)，因为初始条件 $\overline{\psi}_0$ 满足(3.6)，我们有 $|A\sigma_{0p}(0)\xi|=|AD\overline{\psi}_0(p_0)\xi|\leqslant\gamma|A\xi|=\gamma|A\rho_{0p}(0)\xi|$，由推论 2.4 得到 $\forall t\geqslant 0$，$|A\sigma(t,p_0)|\leqslant\gamma|A\rho(t,p_0)|$，又因 $\rho_{0p}(t_0,p_0)\xi=0$，由锥条件推得$\sigma_{0p}(t_0,p_0)\xi=0$，从而 $\mu(t_0,p_0)=0$，由逆向唯一性推得 $\mu(t)=0$, $\forall 0\leqslant t\leqslant t_0$ 成立．然而 $0=p\mu(0)=\rho_{0p}(0,p_0)\xi=I\xi$，从而 $\xi=0$ 矛盾．这表明 $\rho_{0p}(t,p_0)$非变异（$\forall t>0$），于是 $p(t,p_0)$可逆，从而$\overline{\psi}(\tau,p)$整体存在且可微．此外由于 $\chi=\overline{\psi}$而 χ 满足(2.19)这就推得(3.10).

下面我们证明$\overline{\psi}(\tau,p)$的收敛性．

我们将证明(3.5)的解$\overline{\psi}$收敛到 Φ 是强收缩性的一个简单结论．

令 $p\in PH$ 和$\tau>0$ 给定，由引理 2.3，存在 $u_{0a}\in$ graph($\overline{\psi}_0$)，$u_{0m}\in$ graph(Φ)使得 $p=PS(\tau)u_{0a}=PS(\tau)u_{0m}$，又$\overline{\psi}(\tau,p)=QS(\tau)u_{0a}$，$\Phi(p)=QS(\tau)u_{0m}$，下面用下标 a 和 m 分别表示从 graph($\overline{\psi}$)上开始和在 IM 上的解．由于(2.1)的解 $u_a=S(t)u_{0a}$ 和 $u_m=S(t)u_{0m}$不在锥 $\Gamma_N(\gamma)$中($0\leqslant t\leqslant\tau$)，由定理 2.1(2)得到

$$|QA(u_a(t)-u_m(t))|\leqslant e^{-\lambda_{N+1}t/2}|QA(u_{0a}-u_{0m})| \qquad (3.11)$$

利用 $\overline{\psi_0}$, Φ 一致有界性，记 $K_3 = \max_{p\in PH}\{|A\Psi_0(p)|, |A\Phi(p)|\}$，则有对于 $t=\tau$，成立

$$\sup_{p\in PH}|A(\Psi(\tau,p)-\Phi(p))|\leqslant 2K_3 e^{-\lambda_{N+1}\tau/2} \quad \tau\geqslant 0 \tag{3.12}$$

利用 Ψ_0 对 Φ 的逼近(例如取 Ψ_0 为 AIM)，对(2.1)的任意解 $u(t)=p(t)+q(t)$，有

$$|A(q(t)-\Psi_0(p(t)))|\leqslant \mathrm{Error}\quad(\Psi_0) \tag{3.13}$$

其中 $\mathrm{Error}(\Psi_0)\leqslant c\lambda_{N+1}^{-r}, r>0$，于是立刻可得到

$$|A(\Psi_0(p)-\Phi(p))|\leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0) \tag{3.14}$$

对一切使得 $p+\Phi(p)$ 在吸引子上的 p 成立．事实上，对任意 $t_0>0$和任何 $p\in PH$，由引理 2.3，存在 $u_0=p_0+\Phi(p_0)$使得 $p=PS(t_0)u_0$，且 $u(t)=S(t)u_0$ 在吸引子上，因此，

$$|A(\Phi(p(t))-\Psi_0(p(t)))| = |A(q(t)-\Psi_0(p(t)))| \leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0) \qquad \forall t\geqslant 0$$

其中 $q(t)=QS(t)u_0$；在 $t=t_0$ 时，推得(3.14)．注意到由于许多必要的估计对 IM 上的解也成立，只须对 Ψ_0 进行特别选择，对不在吸引子上而在 IM 上的解，估计(3.14)也会成立．

利用(3.14)我们就改进了(3.11)．

一般地，我们令

$$\sup_{p\in PH}|A(\Psi_0(p)-\Phi(p))| = \max_{|Ap|\leqslant 4M_2}|A(\Phi(p)-\Psi_0(p))| = \mathrm{Error}(\Psi_0) \tag{3.15}$$

定理3.2 令 $\tau_0=1/\lambda_N$，设 N 选取得使(2.6)和(3.22)均被满足，则对于 $n\tau_0\leqslant\tau\leqslant(n+1)\tau_0, n=0,1,2,\cdots$，我们有

$$\sup_{p\in PH}|A(\Psi(\tau,p)-\Phi(p))|\leqslant K_{5,N}^{n+1}\mathrm{Error}(\Psi_0)e^{-\lambda_{N+1}\tau/2} \tag{3.16}$$

其中 $K_{5,N}$仅与N 有关，$K_{5,N}<2$ 且当 $N\to\infty$时，$K_{5,N}\to 1$

证明 如(3.11)，(3.12)那样，通过选择 u_{0a}, u_{0m}，使得

$$|A(\Psi(\tau_0,p)-\Phi(p))|\leqslant|A(q_{0a}-q_{0m})|e^{-\lambda_{N+1}\tau_0/2} \tag{3.17}$$

其中 $q_{0a}=Qu_{0a}, q_{0m}=Qu_{0m}$. 注意到

$$
\begin{aligned}
|A(q_{0a}-q_{0m})| &\leqslant |A(\overline{\Psi}_0(p_{0a})-\Phi(p_{0a}))| \\
&\quad + |A(\Phi(p_{0a})-\Phi(p_{0m}))| \\
&\leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0)+\gamma|A(p_{0a}-p_{0m})| \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

其中 $p_{0a}=Pu_{0a}, p_{0m}=Pu_{0m}$,我们令 $\delta(t)=P(S(t)u_{0a}-S(t)u_{0m})=p_a(t)-p_m(t)$. 则 $\delta(\tau_0)=0$ 且 $\delta(t)$满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t}+A\delta+P[F(p_a-\Phi(p_a))-F(p_m+\Phi(p_m))] \\
&\qquad +P[F(p_a+q_a)-F(p_a+\Phi(p_a))]=0
\end{aligned}
$$

由定义,$q_a(t)-\Phi(p_a(t))=\Psi(t,p_a(t))-\Phi(p_a(t))$将方程与 $-A^2\delta$ 取内积,利用(2.4),(3.12)以及 Φ 满足 $|A(\Phi(p_1)-\Phi(p_2))|\leqslant\gamma|A(p_1-p_2)|$,有

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A\delta(t)|^2}{\mathrm{d}t} &\leqslant |A^{3/2}\delta|^2 \\
&\quad + K_2(1+\gamma)|A\delta||A^{1+\beta}\delta| \\
&\quad + 2K_2K_3\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}t/2}|A^{1+\beta}\delta| \\
&\leqslant (\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta})|A\delta|^2 \\
&\quad + 2K_2K_3\lambda_N^{\beta}\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}t/2}|A\delta| \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

我们可设 $|A\delta(0)|\neq 0$,(否则 $|A(q_{0a}-q_{0m})|\leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0)$,(3.16)已被证明 .)因此由 $|Ap_a(t)|$, $|Ap_m(t)|$关于 t 连续性(第 2 节),可设在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 上 $|A\delta(t)|>0$,又因为 $|A\delta(t)|$关于时间 t 呈指数增长,故不失一般可设在 $0\leqslant t<\tau_0$ 上有 $|A\delta(t)|\neq 0$,在(3.19)中同除以 $|A\delta(t)|$,在$[0,\tau_0)$上应用 Gronwall 不等式且利用 $|A\delta(\tau_0)|=0$ 得到

$$
\begin{aligned}
|A\delta(t)| &\leqslant 2K_2K_3\lambda_N^{\beta}[\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}]^{-1} \\
&\quad \times(\exp(\Lambda_N\tau_0)-\exp(\Lambda_N t)) \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

其中 $\Lambda_N=\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}$;对(3.20)右边指数项应用中值定理以及关于 τ_0 的选择,有

$$
|A\delta(0)|\leqslant 2K_3K_4\lambda_N^{\beta-1}
$$

其中 $K_4=2K_2\exp(1+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta-1})$. 因而由(3.18)得到

$$|A(q_{0a}-q_{0m})|\leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0)+2\gamma K_3K_4\lambda_N^{\beta-1}$$

从而改进了估计(3.12),得到对一切 $p\in PH$,

$$\begin{aligned}&|A(\Psi(\tau,p)-\Phi(p))|\\ &\leqslant \mathrm{Error}(\Psi_0)+2\gamma K_3K_4\lambda_N^{\beta-1})\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}\tau/2}\quad,\forall 0\leqslant\tau\leqslant\tau_0\end{aligned}$$

重复上述过程,每一次都改进一次(3.12),经过 n 次,我们得到

$$\begin{aligned}|A(q_{0a}-q_{0m})|\leqslant{}&\mathrm{Error}(\Psi_0)\\ &+\frac{2K_3K_4\gamma}{\lambda_N^{1-\beta}}\mathrm{Error}(\Psi_0)+\cdots\\ &+\left(\frac{2\gamma K_3K_4}{\lambda_N^{1-\beta}}\right)^2\mathrm{Error}(\Psi_0)\\ &+\cdots+\left(\frac{2\gamma K_3K_4}{\lambda_N^{1-\beta}}\right)^n 2K_3\end{aligned}\tag{3.21}$$

选取 N 适当大使得

$$\frac{2\gamma K_3K_4}{\lambda_N^{1-\beta}}\leqslant\frac{1}{4}\tag{3.22}$$

由 n 的任意性,有

$$|A(\Psi(\tau,p)-\Phi(p))|\leqslant K_{5,N}\mathrm{Error}(\Psi_0)\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}\tau/2}$$

其中

$$K_{5,N}=\frac{1}{1-\dfrac{2\gamma K_4K_3}{\lambda_N^{1-\beta}}}\leqslant\frac{4}{3}$$

对于$[\tau_0,2\tau_0]$,$[2\tau_0,3\tau_0]\cdots$中的 τ 重复上述推理,而仅需取 $\Psi_0(p)=\Psi(\tau_0,p)$,$\Psi(2\tau_0,p)$,$\cdots$. 这就证明了定理 .

推论 若 N 满足(2.6)和(3.22),则当 $t\to\infty$时,在 $D(A)$中 $\Psi(t,p)$收敛到 $\Phi(p)$.

证明 由定理 3.1,选取 $\tau_0=\dfrac{1}{\lambda_N}$,当 $t\to+\infty$时,有 $n\tau_0\to\infty$,即 $n\to\infty$,于是由(3.16),有

$$|A(\Psi(t,p)-\Phi(p))|\leqslant\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\mathrm{Error}(\Psi_0)\mathrm{e}^{-n/2} \quad (3.23)$$

注意到级数 $\sum\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\mathrm{e}^{-n/2}$ 收敛，故 $n\to\infty$ 时（即 $t\to\infty$ 时），(3.23)式对固定的 N 趋于零．

§4 AIM 的 C^1 收敛性

本节我们研究在谱间隙条件下，(2.1)AIM 的 C^1 收敛性，为得到所需要的估计，我们必须寻找一个固定的时间区间，在这区间上解的轨道估计必须与 N 无关．取 $\tau_0=1$.

引理4.1 设 $u_{0a}\in\mathrm{graph}\Psi((n-1)\tau_0)$，$u_{0m}\in\mathrm{graph}(\Phi)$，使得 $p=PS(\tau_0)u_{0a}=PS(\tau_0)u_{0m}$，其中 $\tau_0=1$，记 $u_a(t)=S(t)u_{0a}$，$u_m(t)=S(t)u_{0m}$，我们有

$$|A(u_a(t)-u_m(t))|\leqslant K_{8,N}\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda_{N+1}/2} \quad (4.1)$$

对于所有 $0\leqslant t\leqslant\tau_0$，$p\in PH$ 和所有 $n\geqslant1$ 成立．其中常数 $K_{8,N}$ 与 N 有关，且

$$K_{8,N}=(1+\gamma^{-1})(K_{5,N}^{\kappa+1}+2\gamma K_2K_{5,N}^{\kappa+1}\lambda_{N+1}^{\beta}2K_3\mathrm{e}^{\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}}) \quad (4.2)$$

证明 注意到

$$q_a(t)=QS(t)u_{0a}=\Psi((n-1)\tau_0+t,p_a(t))$$
$$q_m(t)=QS(t)u_{0m}=\Phi(p_m(t))$$

其中 $p_a(t)=PS(t)u_{0a}$，$p_m(t)=PS(t)u_{0m}$. 此外，由于 $p=PS(\tau_0)u_{0a}=PS(\tau_0)u_{0m}$，而 $QS(\tau_0)u_{0a}=\Psi(n\tau_0,p)\neq QS(\tau_0)u_{0m}=\Phi(p)$，故对于 $0\leqslant t\leqslant\tau_0$，$u_a$，$u_m$ 不在锥中．因此利用定理3.2得到

$$\begin{aligned}|A(u_a(t)-u_m(t))|&\leqslant(\gamma^{-1}+1)|A[\Psi((n-1)\tau_0\\&\quad+t,p_a(t))-\Phi(p_m(t))]|\\&\leqslant(\gamma^{-1}+1)\{|A[\Psi((n-1)\tau_0+t,p_a(t))\end{aligned}$$

$$-\Phi(p_a(t))]|$$
$$+|A(\Phi(p_a(t))-\Phi(p_m(t)))|\}$$
$$\leqslant(\gamma^{-1}+1)\{K_{5,N}^{\kappa+1}\mathrm{Error}(\Psi((n-1)\tau_0))$$
$$+\gamma|A(p_a(t)-p_m(t))|\} \tag{4.3}$$

其中，由于 $\tau_0=1$，我们必须选 $\kappa=[\lambda_N]+1$；注意到 $|A\delta(t)|=|A(p_a(t)-p_m(t))|$ 已在定理 3.1 中估计．又由(3.16)，有

$$|A[\Psi((n-1)\tau_0+t,p_a(t))-\Phi(p_a(t))]|$$
$$\leqslant K_{5,N}^{\kappa+1}\mathrm{Error}(\Psi((n-1)\tau_0))\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}t/2}$$

在推导(3.19)时利用这一估计，从而(3.20)变为

$$|A\delta(t)|\leqslant K_2\lambda_N^{\beta}K_{5,N}^{\kappa+1}\ \mathrm{Error}(\Psi((n-1)\tau_0))$$
$$\times[\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}]^{-1}(\exp(\Lambda_N\tau_0)-\exp(\Lambda_N t)) \tag{4.4}$$

应用中值定理于指数项，我们推得

$$|A(p_a(t)-p_m(t))|$$
$$\leqslant K_2K_{5,N}^{\kappa+1}\lambda_{N+1}^{\beta}\mathrm{e}^{\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}}\ \mathrm{Error}(\Psi((n-1)\tau_0))$$

又

$$\mathrm{Error}(\Psi((n-1)\tau_0))\leqslant 2K_3\mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}(n-1)\tau_0/2},$$

代入上式，且记

$$K_{8,N}=(1+\gamma^{-1})(K_{5,N}^{\kappa+1}+2\gamma K_{5,N}^{\kappa+1}\lambda_{N+1}^{\beta}2K_3\mathrm{e}^{\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta}})$$

推得(4.1)，其中 $\kappa=[\lambda_N]+1$.

由定理 3.1 知，对于 $u_a(t)=S(t)u_{0a}=p_a(t)+\Psi((n-1)\tau_0+t,p_a(t))$，它关于 Pu_{0a} 的微分是可逆的，即任给 $\xi\in PH$，$\rho_a=\rho_{a,0p}\xi$ 是如下方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t}+A\rho_a+PF'(u_a(t))\mu_a=0 \tag{4.5}$$

其中 $\rho_a(0)=\xi$，$\mu_a(t)=\rho_a(t)+D\Psi((n-1)\tau_0+t,Pu_a(t))\cdot\rho_a(t)$，且 $\rho_{a,0p}$ 对所有 $t>0$ 是可逆的．

引理4.2 算子 $\rho_{a,0p}$ 满足

$$\|A\rho_{a,0p}^{-1}(t)\|_{\mathscr{L}(PH,PH)}\leqslant\exp[(\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^{\beta})t] \tag{4.6}$$

证明　将(4.5)与 $-A^2\rho_a$ 取内积，我们利用 $|A\xi|=1$ 和(2.4)，得到

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A\rho_a|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant\lambda_N|A\rho_a|^2+K_2\lambda_N^\beta|A\mu_a||A\rho_a| \tag{4.7}$$

对于 μ_a 有 $|A\mu_a|\leqslant(1+\gamma)|A\rho_a|$(已利用定理 3.1). 由于 $\rho_{a,0p}$ 可逆且 $|A\xi|=1$，故 $|A\rho_a|\neq 0$，不等式(4.7)两边同除以 $|A\rho_a|$，应用 Gronwall 不等式于 $\tau\in[s,t]$，有

$$|A\rho_a(s)|\leqslant|A\rho_a(t)|\ \mathrm{e}^{(\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta)(t-s)}$$

取 $s=0$，$|A\rho_a(0)|=|A\xi|=1$，得到

$$1\leqslant|A\rho_{a,0p}(t)\xi|\,\mathrm{e}^{(\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta)t}$$

我们转向 AIM 的 C^1 收敛性.

假设 F' 是连续的，

$$|A^{1-\beta}(F'(u_1)-F'(u_2))\mu|\leqslant l_1|A(u_1-u_2)||A\mu| \tag{4.8}$$

定理4.3　设 N 充分大使得满足(2.6)，(3.22)和

$$(1+\gamma)K_7\exp[-(\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta)]\leqslant 1/2 \tag{4.9}$$

则任给 $\varepsilon>0$，存在 $T(\varepsilon)$，使得对所有 $\tau\geqslant T(\varepsilon)$，有

$$\sup_{p\in PH}\|A(D\Psi(\tau,p)-D\Phi(p))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\leqslant\varepsilon$$

其中 K_7 是与 N 无关的常数.

证明　设 $\varepsilon>0$ 给定，$p\in PH$ 是任意元，$\tau_0=1$，如同引理 4.1，对每个 $n\geqslant 1$，存在 $u_{0a}\in\mathrm{graph}(\Psi((n-1)\tau_0))$ 和 $u_{0m}\in\mathrm{graph}(\Phi)$，使得 $p=PS(\tau_0)u_{0a}=PS(\tau_0)u_{0m}$ 及 $\Psi(n\tau_0,p)=QS(\tau_0)u_{0a}$，$\Phi(p)=QS(\tau_0)u_{0m}$，其中 $\tau_0=1$. 令 $p_{0a}=Pu_{0a}$，$p_{0m}=Pu_{0m}$，我们有

$$q_a(t,p_{0a})=QS(t)u_{0a}=\Psi((n-1)\tau_0+t,PS(t)u_{0a})$$

$$q_m(t,p_{0m})=QS(t)u_{0m}=\Phi(PS(t)u_{0m}),\quad\forall t\geqslant 0$$

q_a 对 p_{0a} 取微分，q_m 对 p_{0m} 取微分，我们得到

$$\sigma_{a,0p}(t) = D\Psi((n-1)\tau_0 + t, p_a(t))\rho_{a,0p}(t)$$

$$\sigma_{m,0p}(t) = D\Psi(p_m(t))\rho_{m,0p}(t), \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant \tau_0$$

此外,对 $\xi \in PH$, $\mu_a = (\rho_{a,0p} + \xi_{a,0p})\xi$, $\mu_m = (\rho_{m,0p} + \xi_{m,0p})\xi$ 分别是$S(t)u_0 = S(t)u_{0a}$和$S(t)u_0 = S(t)u_{0m}$的(2.18)的解．注意到

$$\begin{aligned}&[D\Psi((n-1)\tau_0 + t, p_a(t)) - D\Phi(p_m(t))]\rho_{a,0p}\xi \\ &= (\sigma_{a,0p}(t) - \sigma_{m,0p}(t))\xi + D\Phi(p_m(t))(\rho_{m,0p}(t) - \rho_{a,0p}(t))\xi\end{aligned}$$

因此,当 $t = \tau_0$ 时,注意到 $\rho_{a,0p}: PH \to PH$,而 $\sigma_{a,0p}: PH \to QH$,有

$$\begin{aligned}&|A(D\Psi(n\tau_0, p) - D\Phi(p))\rho_{a,0p}(\tau_0)\xi| \\ &\leqslant (1+\gamma)|A(\mu_a(\tau_0) - \mu_m(\tau_0))| \end{aligned} \tag{4.10}$$

下面转向估计$|A(\mu_a(\tau_0) - \mu_m(\tau_0))|$．从方程出发,有

$$\mu_a(t) = \mathrm{e}^{-At}\mu_a(0) - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}F'(S(t)u_{0a}(s))\mu_a(s)\mathrm{d}s \tag{4.11}$$

以 m 代a,得 $\mu_m(t)$,于是若记 $\Delta\mu = \mu_a - \mu_m$,则

$$\begin{aligned}\Delta\mu(t) = {} & \mathrm{e}^{-At}\Delta\mu(0) \\ & - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[F'(u_a(s))\mu_a(s) - F'(u_m(s))\mu_a(s)]\mathrm{d}s \\ & - \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)A}[F'(u_m(s))(\mu_a(s) - \mu_m(s))]\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中 $u_a(t) = S(t)u_{0a}$, $u_m(t) = S(t)u_{0m}$. 利用(2.18)可以得到在$[0, \tau_0]$上,存在常数 M_3,使$|A\mu_a| \leqslant M_3$. 又 $\rho_{a,0p}(0) = P$, $\rho_{m,0p}(0) = P$,而 $\mu_{a,0p}(0) = P + D\Psi((n-1)\tau_0, p_a(0))$, $\mu_{m,0p}(0) = P + D\Phi(p_m(0))$,故 $\Delta\mu(0) \in QH$,我们利用 $\|A^\beta \mathrm{e}^{-tA}\|_{\mathscr{L}(H,H)} \leqslant K_6 t^{-\beta}$,因此利用(4.8)和(2.4)推得

$$\begin{aligned}|A\Delta\mu(t)| \leqslant {} & \mathrm{e}^{-\lambda_{N+1}t}|A\Delta\mu(0)| \\ & + \int_0^t \frac{K_6 L_1 M_3}{(t-s)^\beta}|A(u_a(s) - u_m(s))|\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \frac{K_2 K_6}{(t-s)^\beta}|A(\mu_a(s) - \mu_m(s))|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

利用(4.1)和 Gronwall 不等式,有

$$|A\Delta\mu(\tau_0)|\leqslant K_7 e^{-\lambda_{N+1}\tau_0}|A\Delta\mu(0)|+K_{9,N}e^{-(n-1)\lambda_{N+1/2}} \tag{4.12}$$

其中 $K_{9,N}=K_7K_6L_1M_3K_{8,N}(1-\beta)^{-1}$,$K_{8,N}$由(4.2)给出.

在关于 F' 一致连续条件下也可得到(4.12).下面估计 $|A\Delta\mu(0)|$.有

$$\begin{aligned}&|A(\mu_a(0)-\mu_m(0))|\\&=|A(D\Psi(n-1)\tau_0,p_a(0))-D\Phi(p_m(0)))\xi|\\&\leqslant[\|A(D\Psi((n-1)\tau_0,p_a(0))-D\Phi(p_a(0)))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\\&\quad+\|A(D\Phi(p_a(0))-D\Phi(p_m(0)))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}]|A\xi|\end{aligned} \tag{4.13}$$

为得到算子范估计,我们对所有 $\xi\in PH$,使得$|A\rho_{a,0p}(\tau_0)\xi|=1$ 的 ξ 取上确界.注意到 $\rho_{a,0p}$的可逆性,故所有这样的单位长度的向量可以得到.利用引理 4.2,(4.6),有

$$|A\xi|\leqslant\exp(\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta)$$

对这样选取的 ξ,(4.10)变为

$$\begin{aligned}&|A(D\Psi(n\tau_0,p)-D\Phi(p))\rho_{a,0p}(\tau_0)\xi|\\&\leqslant(1+\gamma)K_{9,N}e^{-(n-1)\lambda_{N+1}/2}\\&\quad+(1+\gamma)K_7e^{-\lambda_{N+1}}e^{\lambda_N+K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta}\\&\quad\times[\|A(D\Psi((n-1)\tau_0,p_a(0))-D\Phi(p_a(0)))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\\&\quad+\|A(D\Phi(p_a(0))-D\Phi(p_m(0)))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}]\end{aligned} \tag{4.14}$$

利用谱间隙条件和 K_7 仅与 K_2,K_6,β,τ_0 有关,我们可选取 N 使得

$$(1+\gamma)K_7e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_N-K_2(1+\gamma)\lambda_N^\beta)}\leqslant\frac{1}{2} \tag{4.15}$$

由引理 4.1,对所有 $p\in PH$,只须 τ(即 $n\tau_0$)充分大.$|AP(u_{0a}-u_{0m})|$可以为任意小,又 $D\Phi$ 连续,具有紧支集,因此一致连续.故对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $T_1(\varepsilon)$,使得对所有 $p\in PH$,$\tau>T_1(\varepsilon)$时,

$$\frac{1}{2}\|A(D\Phi(p_a(0))-D\Phi(p_m(0)))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}\leqslant\frac{\varepsilon}{8}$$

其中 $p_a(0)=Pu_{0a}, p_m(0)=Pu_{0m}$.

回到(4.14),对所有使得 $|A\rho_{a,0p}(\tau_0)\xi|=1$ 的 $\xi\in PH$ 取上确界,我们得到:

$$\sup_{p\in PH}\|A(D\Psi(n\tau_0,p)-D\Phi(p))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sup_{p\in PH}\|A(D\Psi((n-1)\tau_0,p)-D\Phi(p))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}$$
$$+\frac{\varepsilon}{8}+(1+\gamma)K_{9,N}e^{-(n-1)\lambda_{N+1}/2}$$

选取 n 充分大,使得

$$(1+\gamma)K_{9,N}e^{-(n-1)\lambda_{N+1}/2}\leqslant\frac{\varepsilon}{8},\qquad \forall n>N_0(\varepsilon)$$

令 $a_n=\sup_{p\in PH}\|A(D\Psi(n\tau_0,p)-D\Phi(p))\|_{\mathscr{L}(PH,QH)}$

于是

$$a_n\leqslant\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

反复迭代,有

$$a_{n+m}\leqslant\frac{a_{n-1}}{2^{m+1}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

但是 $|a_{n-1}|\leqslant2\gamma$,取 m 适当大,使得 $2\gamma2^{-(m+1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$,则对所有 $\tau\geqslant T(\varepsilon)=\max\{T_1(\varepsilon),(N_0(\varepsilon)+m)\tau_0\}$,有

$$a_{n+m}\leqslant\varepsilon$$

证毕.

注 1 通过对(3.5)的 Galerkin 逼近,也可以获得 $\Psi_N(\tau,p)$ 到 Φ 的 C^1 收敛性.

注2 利用椭圆正则化技巧于(3.4),研究

$$\Phi_\varepsilon(p)+A\Phi_\varepsilon(p)-D\Phi_\varepsilon(p)(Ap$$
$$+PF(p+\Phi_\varepsilon(p)))+QF(p+\Phi_\varepsilon(p))=0$$

其中 Δ 为 PH 上 Laplace 算子,在球 $PB(0,4\rho_0)$ 边界上具有 Dirichlet 零边值条件,$\varepsilon>0$ 表示人为粘性.可以证明当 $\varepsilon\to0$ 时,

$\Phi_\varepsilon \to \Phi$.

注3 对本章第1节所采用的逼近技巧在一定条件下,也可以证明 AIM 的 C^1 收敛性.

第五章 指数吸引子与吸引子结构初步

谱间隙条件的限制导致若干非线性发展方程惯性流形的存在是至今仍未解决的问题,为研究吸引子,人们转向指数型吸引轨道且关于流正向不变的一类紧分形集的研究,这就是所谓指数吸引子,又称为惯性分形集(记为 IFS)的研究．本章分别就离散、连续动力系统 IFS 的构造做介绍,然后给出无界区域上耗散系统 IFS 存在性结果,基于这些结果,在§3 和§5 研究了几类强、弱耗散发展方程的 IFS,最后研究了几类系统吸引子的分形结构．本章主要参考文献见[33],[97]~[120].

§1 离散动力系统 IFS

设 H 是 Hilbert 空间,$X\subset H$ 是紧连通子集,$S=S(t_x)$是 X 到其自身的 Lip 连续映射,其 Lipschitz 常数记为 l:$\mathrm{Lip}_X(S)=l$;设对于 X,S 有紧的连通的整体吸引子 $\mathscr{A}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}S^nX$,自然有 $\rho(S^nX,\mathscr{A})\to 0$(当 $n\to+\infty$).

定义1 紧集 M 称为(S,X)的惯性分形集,如果 $\mathscr{A}\subseteq M\subseteq X$,且有

(1)$SM\subseteq M$;

(2)M 有有限分形维 $d_F(M)<\infty$;

(3)存在正常数 c_0,c_1,使 $\mathrm{dist}(S^nX,M)\leqslant c_0e^{-c_1n}$, $\forall\, n\geqslant 1$.

易见,若连续动力系统有 IM,记为 M_0,则 $M_0\cap X$,是一 IFS,IFS 的构造类似于吸引子的"分形展开",起控制作用的是二分法原理和收缩性导致的"锥性质".

定义2 如果对每个 $\delta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$,存在秩为 $N_0(\delta)$的正交投

影 $P=p(\delta)$，使对 X 中每个 u 和 v，或者

$$|Su-Sv|_H\leqslant\delta|u-v|_H \tag{1.1}$$

或者

$$|Q(Su-Sv)|_H\leqslant|P(Su-Sv)|_H \tag{1.2}$$

成立，则说 S 在 X 中有收缩性．

容易证明，定义 2 的一个等价形式是，如果对 X 中的 u,v，有

$$|Su-Sv|_H>\sqrt{2}|P(Su-Sv)|_H \tag{1.3}$$

则

$$|Su-Sv|_H<\delta|u-v|_H \tag{1.4}$$

通常我们称(1.2)为"锥性质"．

记 $\overline{B_r}(a)$ 是 H 空间以 X 中 a 为中心，r 为半径的闭球，令

$$Z=S(\overline{B_r}(a)\cap X) \tag{1.5}$$

且令 E 表示满足锥性质(1.2)的 Z 的极大子集：

$$|u-v|_H\leqslant\sqrt{2}|P(u-v)|_H \qquad \text{对所有 } u,v\in E \tag{1.6}$$

注意 E 是闭的，而且是紧的．此外，正交投影 P 在 E 上是单射，故 E 的所有覆盖可由 PE 的覆盖经提升而得到．利用 P 在 E 上内射性，可用 N_0 和 ρ 估计覆盖 Z 的 ρ 球的数量．

引理1.1 对于任何 $2\delta<\theta<1$，存在由(1.5)所定义的 Z 的覆盖，它由 k_0 个中心在 E 中的 $y_j, j=1,\cdots,k_0$，而半径为 θr 的球组成．此外有

$$k_0\leqslant\left(\frac{3l}{\theta-2\delta}+1\right)^{N_0} \tag{1.7}$$

证明 由于 $PE\subseteq PZ\subseteq PH$，有 $\operatorname{diam}(PE)\leqslant\operatorname{diam}(PZ)\leqslant\operatorname{diam}(Z)\leqslant 2lr$，任给 $\rho>0$，可用 k_0 个球 $B_\rho^{PH}(py_j)$ 覆盖 PE，其中 $y_j\in E, j=1,\cdots,k_0$. 注意到 P 的单射性，保证了 Py_j 是 PH 中不同的点．为估计 k_0，我们注意 $\operatorname{diam}(PE)\leqslant 2l\gamma$，又若 k 是 PE 中 P 可分点的极大数量，则中心在这些点的 ρ 球覆盖了 PE，因此 $k_0\leqslant k$，另一方面，中心在 Py_j 的 $\rho/2$ 球 $j=1,\cdots,k$ 是不相交的，且

$$\bigcup_{j=1}^{k}B_{\rho/2}^{PH}(Py_j)\subseteq B_{\rho/2}^{PH}(PE)=\{y\in PH,\operatorname{dist}(y,PE)<\rho/2\} \tag{1.8}$$

由于 $\mathrm{diam}(B_{\rho/2}^{PH}(PE))\leqslant 2lr+\rho$，由 N_0 体积比较得：

$$k\cdot w_{N_0}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{N_0}\leqslant w_{N_0}\left(lr+\frac{\rho}{2}\right)^{N_0} \tag{1.9}$$

于是有

$$k_0\leqslant k\leqslant\left(\frac{2lr}{\rho}+1\right)^{N_0} \tag{1.10}$$

其中 w_{N_0} 为 R^{N_0} 中单位球体积．对于 PE 的上述覆盖，通过扩张半径可得到 PZ 的覆盖，一旦得到这个覆盖，由(1.6)我们看到

$$|Py-Py_j|_H<\rho\Rightarrow|y-y_j|_H<\sqrt{2}\rho \tag{1.11}$$

因此，$u=\{B_{\theta r}^{H}(y_j)\}_{j=1}^{k_0}$ 就覆盖了 Z．事实上，如果 $Py\in PE$，则 $|Py-Py_j|_H<\rho$，对某些 $i\in\{1,2,\cdots,k_0\}$ 成立．另一方面，如 $z\in Z/E$，由 Z 和 E 的定义，存在 $u\in\overline{B}_r(a)\cap X$，使得 $z=Su$，由在 E 中存在 $y=Sv$，$v\in\overline{B}_r(a)\cap X$，使得 $|z-y|>\sqrt{2}|p(z-y)|$，又由(1.3)，(1.4)推得：

$$|z-y|_H=|Su-Sv|_H<\delta|u-v|_H\leqslant 2r\delta \tag{1.12}$$

由于 $y\in E$，存在 $y_j\in E$，使 $|Py-Py_j|_H<\rho$，因此 $|y-y_j|_H<\sqrt{2}\rho$，于是

$$|z-y_j|_H\leqslant|z-y|_H+|y-y_j|_H\leqslant 2r\delta+\sqrt{2}\rho<\theta r \tag{1.13}$$

如果取

$$\rho=\frac{2(\theta-2\delta)r}{3} \tag{1.14}$$

因此，由(1.10)，(1.14)，有

$$k_0\leqslant\left(\frac{3l}{\theta-2\delta}+1\right)^{N_0} \tag{1.15}$$

注　如果 $4\delta<\theta<1$，则可选取 θ 充分接近 4δ，且 $\rho=\delta r$，使 $k_0\leqslant\left(\frac{2l}{\delta}+1\right)^{N_0}$.

从现在起我们记

$$\alpha(X) = \lg k_0 / \lg(1/\theta)$$

现在递归地继续上述覆盖过程,精细上面给出的覆盖以覆盖 $S^k(X),(k \geqslant 1)$. 令 $R>0, a \in X, X \subseteq \overline{B}_R(a)$;令 E_1 是 $S(\overline{B}_R(a) \cap X)$的子集,对 E_1 中每个 u, v 均满足(1.6)且是 $S(X)$的具这一性质的极大点集. 由引理 1.1,存在 E_1 中 $a_{j_1}, 1 \leqslant j_1 \leqslant k_0$,使得

$$S(X) = S(\overline{B}_R(a) \cap X) \subseteq \bigcup_{j_1=1}^{k_0} \overline{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap SX \quad (1.16)$$

k_0 由(1.7)给出. 继续精细这覆盖以得到 $S^2(X)$的一个覆盖. 令 E_{2,j_1}是 $S(\overline{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap SX)$中满足锥性质(1.6)的极大点集,$1 \leqslant j_1 \leqslant k_0$,如同引理 1.1,用 M_2 个球 $\overline{B}_{\theta^2 R}(a_{j_1,j_2}) \cap S^2X$ 覆盖这个紧集,而 $a_{j_1,j_2} \in E_{2,j_1}, 1 \leqslant j_2 \leqslant M_2$,由(1.10),(1.13),$r = \theta R, \rho = \dfrac{2\theta R}{3}(\theta - 2\delta)$,且

$$M_2 \leqslant \left(\frac{3l}{\theta - 2\delta} + 1\right)^{N_0} \quad (1.17)$$

利用关于 M_2 和 k_0 同样估计,有 $M_2 = k_0$,再

$$\bigcup_{j_1=1}^{k_0} E_{2,j_1} \subset \bigcup_{j_1=1}^{k_0} S(\overline{B}_{\theta R}(a_{j_1}) \cap SX) \subset S^2X \quad (1.18)$$

而且

$$S^2(X) \subset \bigcup_{j_1=1}^{k_0} S(\overline{B}_{\theta R}(a_{j1}) \cap SX) \subset \bigcup_{\substack{j_1=1 \\ j_2=1}}^{k_0} \overline{B}_{\theta^2 R}(a_{j_1 j_2}) \cap S^2X \quad (1.19)$$

递归地继续这一过程,可类似覆盖 $S^{k+1}(X)$,得到

推论 1 存在 $S^{k+1}(X)$的一个覆盖,使得

$$S(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1,j_2,\cdots,j_k}) \cap S^kX) \subset \bigcup_{j_{k+1}=1}^{k_0} \overline{B}_{\theta^{k+1} R}(a_{j'_1,\cdots,j'_{k+1}}) \cap S^{k+1}X \quad (1.20)$$

$$a_{j_1,\cdots,j_{k+1}} \in E_{k+1,j_1,\cdots,j_k}$$

此外

$$\bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_k=1}}^{k_0} E_{k+1,j_1,\cdots,j_k} \quad \subset \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_k=1}}^{k_0} S(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1,\cdots,j_k}) \cap S^k X) \subset S^{k+1}X \tag{1.21}$$

和

$$S^{k+1}(X) \subset \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_k=1}}^{k_0} S(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1,\cdots,j_k}) \cap S^k X) \quad \subset \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_{k+1}=1}}^{k_0} \overline{B}_{\theta^{k+1} R}(a_{j_1,\cdots j_{k+1}}) \cap S^{k+1}X \tag{1.22}$$

其中 $E_{k+1,j_1,\cdots,j_k}$ 为紧集 $S(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1,\cdots,j_k}) \cap S^k X)$ 中相对于锥性质(1.6)的最大点集, $a_{j_1,\cdots,j_k} \in E_{k,j_1,\cdots,j_{k-1}}$, $j_1,\cdots,j_k \in \{1,2,\cdots,k_0\}$, 球 $\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1,\cdots,j_k}) \cap S^k X$ 由 $S^k(X)$ 的覆盖而得到,而中心 $a_{j_1,\cdots,j_k}$ 在 $E_{k,j_1,\cdots,j_k}$ 中选取.

我们令

$$E^{(k+1)} = \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_k=1}}^{k_0} E_{k+1,j_1,\cdots,j_k} \subset S^{k+1}X \tag{1.23}$$

引理 1.2 整体吸引子 $\mathscr{A}$ 的分形维度 $d_F(\mathscr{A})$ 有限且可由 $\alpha(\mathscr{A})$ 所估计.

$$\alpha(\mathscr{A}) = \lg k_0 / \lg\left(\frac{1}{\theta}\right) \tag{1.24a}$$

证明 令 $N_\rho(\mathscr{A})$ 是覆盖 $\mathscr{A}$ 的以 ρ 为半径的小球个数的最小值,则如 $\theta<1$,对 $X=\mathscr{A}$,利用引理 1.1 和 $S\mathscr{A}=\mathscr{A}$,得到用 $\theta\rho$ 小球覆盖 $\mathscr{A}$ 的精细估计, $N_{\theta\rho}(\mathscr{A}) = N_{\theta\rho}(S\mathscr{A}) \leqslant k_0 N_\rho(\mathscr{A})$, 于是 $N_{\theta^j\rho}(\mathscr{A}) \leqslant k_0^j N_\rho(\mathscr{A})$; 选取 $\varepsilon>0$, 使得 $\theta^{j+1}\rho < \varepsilon \leqslant \theta^j\rho$, 于是 $N_\varepsilon(\mathscr{A}) \leqslant N_{\theta^{j+1}\rho}(\mathscr{A}) \leqslant k_0^{j+1} N_\rho(\mathscr{A})$, 由于 $\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \geqslant -\lg(\theta^j\rho)$, 故

$$\frac{\lg N_\varepsilon(\mathscr{A})}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{\lg(k_0^{j+1} N_\rho(\mathscr{A}))}{-\lg(\theta^j \rho)}$$

因此 $d_F(\mathscr{A}) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\lg N_\varepsilon(\mathscr{A})}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \leqslant \lim_{j \to \infty} \frac{\lg(k_0^{j+1} N_\rho(\mathscr{A}))}{-\lg(\theta^j \rho)} = \lg k_0 / \lg\left(\frac{1}{\theta}\right)$.

注 如果利用(1.7)中关于 k_0 的估计,则有

$$\alpha(\mathscr{A}) \leqslant \frac{N_0\left(\lg\left(\frac{2l}{\delta}+1\right)\right)}{\lg(1/\theta)}$$

引理1.3 令 $C_\infty = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(k)}}$,则

$$d_F(C_\infty) \leqslant \max\{\alpha(X), N_0\} \tag{1.24b}$$

证明 令 $\{B_1(x_j)\}_{j=1}^{\overline{N}}$ 是以 1 为半径的 $\overline{N}$ 个小球对于 X 的覆盖,则对任何 $\overline{\rho} \geqslant 1$,有

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{\overline{N}} B_{\overline{\rho}}(x_j)$$

给定 $\varepsilon > 0$,定义 $N^*: 2\theta^{N^*+1} < \varepsilon < 2\theta^{N^*}$ 和 $\overline{\rho} \in \left[1, \frac{1}{\theta}\right]$ 使得 $\theta^{N^*+1}\overline{\rho} = \varepsilon/2$. 注意到

$$C_\infty = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} E^{(k)}} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{N^*} E^{(k)}} \cup S^{N^*+1}(X) \tag{1.25}$$

事实上,由 $E^{(k+1)} \subset S^{k+1}X \subset S^{N^*+1}X$, $\forall k \geqslant N^*$ 导出(1.25). 记 $N_\varepsilon(Y)$ 是必须覆盖 Y 的 ε 小球的最小数量,则由(1.25)推得

$$N_\varepsilon(C_\infty) \leqslant \sum_{k=1}^{N^*} N_\varepsilon(E^{(k)}) + N_\varepsilon(S^{N^*+1}(X)) \tag{1.26}$$

由于 $\varepsilon = 2\overline{\rho}\theta^{N^*+1}$,由引理 1.1 知

$$N_\varepsilon(S^{N^*+1}(X)) = N_{2\overline{\rho}\theta^{N^*+1}}(S^{N^*+1}(X)) \leqslant k_0^{N^*+1}\overline{N} \tag{1.27a}$$

下面估计 $N_\varepsilon(E^{(k+1)})$. 由引理 1.1

$$\bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots \\ j_k=1}}^{k_0} E_{k+1,j_1,\cdots,j_k} = E^{(k+1)} \subseteq \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots \\ j_{k+1}=1}}^{k_0} (\overline{B}_{2\bar{\rho}\theta^{k+1}}(a_{j_1,\cdots,j_{k+1}}) \cap S^{k+1}X)$$

于是

$$\bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots \\ j_k=1}}^{k_0} PE_{k+1,j_1,\cdots,j_k} = PE^{(k+1)} \subseteq \bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots \\ j_{k+1}=1}}^{k_0} (B^{PH}_{2\bar{\rho}\theta^{k+1}}(pa_{j_1,\cdots,j_{k+1}}) \cap S^{k+1}X) \tag{1.27b}$$

我们用正多面体覆盖小球 $B^{PH}_{2\bar{\rho}\theta^{k+1}}$,然后再嵌入到以 $\varepsilon/\sqrt{2}$为半径小球中,于是得到用 $N^{\#}$个 $\varepsilon/\sqrt{2}$为半径小球对 $2\bar{\rho}\theta^{k+1}$为半径小球的覆盖,其中

$$N^{\#} \leqslant \left(\frac{2\bar{\rho}\theta^{k+1}\sqrt{2N_0}}{\varepsilon}\right)^{N_0} \leqslant (2N_0)^{N_0/2}(\theta^{k-N^*})^{N_0} \tag{1.28}$$

上式已利用 $\varepsilon = 2\bar{\rho}\theta^{N^*+1}$,返回到(1.27b),我们看到 $PE^{(k+1)}$由 $M = k_0^{k+1}N^{\#}\overline{N}$个半径为$\varepsilon/\sqrt{2}$的小球$\{B_i^{PH}\}_{i=1}^{M}$所覆盖,且对任何指标集 $j_1,\cdots,j_k$,存在有限多个 $\varepsilon/\sqrt{2}$ 半径的小球覆盖 $PE_{k+1,j_1,\cdots,j_k}$,它们由$\{B_i^{PH}\}_{i=1}^{M}$中选取,但是,由于$|u-v|_H \leqslant \sqrt{2}|P(u-v)|_H$, $\forall u,v \in E_{k+1,j_1\cdots j_k}$,因此具有以 ε 为半径,以同样点为中心的小球覆盖了 $E_{k+1,j_1,\cdots,j_k}$,即以 ε 为半径的M 个小球覆盖了 $E^{(k+1)}$,由此结合(1.27),(1.28),推得:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(C_\infty) &\leqslant \sum_{k=0}^{N^*-1} k_0^{k+1}\overline{N}(2N_0)^{N_0/2}(\theta^{k-N^*})^{N_0} + k_0^{N^*+1}\overline{N} \\ &\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\theta^{-(N^*+1)N_0}\sum_{k=1}^{N^*}(k_0\theta^{N_0})^k \\ &\quad + k_0^{N^*+1}\overline{N} \end{aligned} \tag{1.29}$$

现在考虑两种情形

1. $k_0\theta^{N_0}\leqslant 1$，由定义 $\alpha=\lg k_0/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)\leqslant N_0$，由(1.29)

$$N_\varepsilon(C_\infty)\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\theta^{-(N^*+1)N_0}N^* + k_0^{N^*+1}\overline{N}$$

代入 $\theta^{N^*+1}=\varepsilon/2\overline{\rho}$ 和 $N^*+1=\lg(\varepsilon/2\overline{\rho})/\lg\theta$，有

$$N_\varepsilon(C_\infty)\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\left(\frac{2\overline{\rho}}{\varepsilon}\right)^{N_0}\frac{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)} + k_0^{\frac{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}}\overline{N}$$

利用 $a^{\lg b/\lg c}=b^{\lg a/\lg c}$，上式

$$\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\left(\frac{2\overline{\rho}}{\varepsilon}\right)^{N_0}\frac{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)} + \left(\frac{2\overline{\rho}}{\varepsilon}\right)^{\lg k_0/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}\overline{N}$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N_\varepsilon(C_\infty)}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{N_0\lg\left(\frac{2\overline{\rho}}{\varepsilon}\right)}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} + \frac{\lg\left[\overline{N}+\overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)/\lg(1/\theta)\right]}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right]$$

$$= N_0$$

2. $\theta^{N_0}k_0\geqslant 1$，

$$N_\varepsilon(C_\infty)\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}\theta^{-(N^*+1)N_0}N^*(k_0\theta^{N_0})^{N_*+1} + k_0^{N^*+1}\overline{N}$$

$$\leqslant \overline{N}(2N_0)^{N_0/2}N^*k_0^{N^*+1} + k_0^{N^*+1}\overline{N}$$

$$= \overline{N}k_0^{N^*+1}\left[(2N_0)^{N_0/2}N^* + 1\right]$$

因此

$$N_\varepsilon(C_\infty)\leqslant \overline{N}k_0^{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}\left[(2N_0)^{N_0/2}\frac{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+1\right]$$

$$= \overline{N}\left(\frac{2\overline{\rho}}{\varepsilon}\right)^{\lg k_0/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}\left[(2N_0)^{N_0/2}\frac{\lg(2\overline{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+1\right]$$

从而

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\lg N_\varepsilon(C_\infty)}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}=\frac{\lg k_0}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}=\alpha(X)$$

引理1.4 记 $\Gamma_\infty=\bigcup_{j=0}^{\infty}S^j(C_\infty)$，则

$$d_F(\Gamma_\infty)\leqslant\max\{\alpha(X),N_0\}\tag{1.30}$$

证明 注意 C_∞闭，故紧，我们可以证明，若对紧集 C，$d_F(C)\leqslant\overline{d}=\max\{\alpha,N_0\}$，则 $\Gamma_\infty=\bigcup_{j=0}^{\infty}S^j(C)$也有有限分形维，且 $d_F(\Gamma_\infty)\leqslant\max\{\alpha,N_0\}$.

注意到

$$\Gamma_\infty\subset C\cup S(C)\cup\cdots\cup S^{n-1}(C)\cup S^n(C)\cup S^{n+1}(X)\tag{1.31}$$

固定 n，使 $\theta^{n+1}<\varepsilon\leqslant\theta^n$，然后选 $\overline{\rho}\in\left[1,\frac{1}{\theta}\right]$，使得 $\varepsilon=\theta^{n+1}\overline{\rho}$，如同引理 1.3，

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant\sum_{j=0}^{n}N_\varepsilon(S^j(C))+N_\varepsilon(S^{n+1}(X))$$

以 C 代X，由引理 1.1，

$$N_{\theta^j\overline{\rho}}(S^j(C))\leqslant k_0^jN_{\overline{\rho}}(C)$$

利用 $\varepsilon=\theta^{n+1}\overline{\rho}$，有

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant\sum_{j=0}^{n}k_0^jN_{\varepsilon\theta^{-j}}(C)+\overline{N}k_0^{n+1}\tag{1.32}$$

$\overline{N}$ 同引理 1.3 中所述．由于 $d_F(C)\leqslant\overline{d}$，故对任何 $d>\overline{d}$，存在 $\delta_0=\delta_0(d)>0$，使对任何 $\delta\leqslant\delta_0$，$\lg N_\delta(C)<d\lg\left(\frac{1}{\delta}\right)$，因此 $N_\delta(C)<\left(\frac{1}{\delta}\right)^d$，$\forall\,\delta\leqslant d_0$.

另一方面，对 $\delta\geqslant\delta_0$，利用 $N_\delta(C)\leqslant N_{\delta_0}(C)$，我们得到对于 $\delta_0\leqslant\delta\leqslant1$，有

$$N_\delta(C)\leqslant N_{\delta_0}(C)\leqslant\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^d=\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^d\left(\frac{1}{\delta}\right)^d\leqslant c_d\left(\frac{1}{\delta}\right)^d\tag{1.33}$$

其中 $c_d=\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^d>1$,因此对于 $\delta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$,有 $N_\delta(C)\leqslant c_d\left(\frac{1}{\delta}\right)^d$.
回到(1.32),利用 $\delta=\varepsilon\theta^{-j}<1$(因为 $\theta<1,\bar{\rho}\in\left[1,\frac{1}{\theta}\right],\theta^{-j}\varepsilon=\theta^{n+1-j}\bar{\rho}<\theta^{n-j}<1$)推得:

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant\sum_{j=0}^{n}k_0^j c_d\left(\frac{1}{\varepsilon\theta^{-j}}\right)^d+\overline{N}k_0^{n+1}$$

$$\leqslant c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d\sum_{j=0}^{n}(k_0\theta^d)^j+\overline{N}k_0^{n+1}\qquad(1.34)$$

1. 如果 $k_0\theta^d\leqslant1$,则

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant c_d\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d n+\overline{N}k_0^{n+1}$$

另一方面,$n+1=\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)/\lg(1/\theta)$,故

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant\frac{c_d}{(\bar{\rho})^d}\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^d\frac{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+\overline{N}k_0^{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}$$

$$\leqslant\frac{c_d}{\bar{\rho}^d}\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^d\frac{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+\overline{N}\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^{\lg^{k_0}/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}\qquad(1.35)$$

由定义,$\alpha=\lg k_0/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)$,而 $d>\bar{d}\geqslant\alpha$,于是

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^d\left[c_d\bar{\rho}^{-d}\frac{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+\overline{N}\right]$$

由此得到:$\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\frac{\lg N_\varepsilon(\Gamma_\infty)}{\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\leqslant d$

2. $k_0\theta^d\geqslant1$,

$$N_\varepsilon(\Gamma_\infty)\leqslant c_d\bar{\rho}^{-d}\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^d(k_0\theta^d)^{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)/\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}$$

$$\cdot\frac{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)}{\lg\left(\frac{1}{\theta}\right)}+\overline{N}\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)\lg k_0/\lg\frac{1}{\theta}$$

$$\leqslant\left(\frac{\bar{\rho}}{\varepsilon}\right)^{\lg k_0/\lg\frac{1}{\theta}}\left[\frac{c_d}{\bar{\rho}^d}\frac{\lg(\bar{\rho}/\varepsilon)}{\lg\frac{1}{\theta}}+\bar{N}\right]$$

于是得到 $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\dfrac{\lg N_\varepsilon(\Gamma_\infty)}{\lg\frac{1}{\varepsilon}}\leqslant\dfrac{\lg k_0}{\lg\frac{1}{\theta}}\leqslant d$

因此，由 $d>\bar{d}$ 任意性，$d_F(\Gamma_\infty)\leqslant\bar{d}=\max\{\alpha,N_0\}$.

我们定义

$$M=\mathscr{A}\cup\left(\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}S^j(E^{(k)})\right)\tag{1.36}$$

引理1.5 M 闭，且与 $\mathscr{A}\cup\Gamma_\infty$ 重合，即有 $M=\mathscr{A}\cup\Gamma_\infty$.

证明 用反证法，设 M 非闭，则存在 $X\times X\times N\times N$ 中序列 (x_i,y_i,k_i,N_i) 使得

$y_i=S^{N_0}(x_i),x_i\in E^{(k_i)},(y_i,x_i)\to(y_*,x_*)$，但是 $y_*\notin M$. 由于 $\mathscr{A}\subset M$，故 $y_*\notin\mathscr{A}$，如果 $\{N_i\}$ 是自然数的无界序列，则 $y_i=S^{N_i}(x_i)$，推得 $y_*\in\bigcap S^n(X)=\mathscr{A}$，这不会发生，故存在 N^* 使 $N_i=N^*$ 出现无穷多次，如必要，可选取子列以保证 $y_*=\lim\limits_{i\to\infty}S^{N^*}(x_i),x_i\in E^{(k_i)}$. 另一方面，$k_i\to\infty$，否则，即有 $k_i\to k_*$，当 $i\to\infty$ 时，$x_i\in E^{(k_*)}$，而 $E^{(k_*)}$ 紧，故存在 x_*，使 $x_{i_n}\to x_*$，故 $x_*\in M$，从而 $y_*\in M$，矛盾. 现在由 $y_*\notin M$ 已推出 $x_*\notin E^{(k)},\forall k\geqslant 1$，且 $x_i\notin\mathscr{A}$，但 $x_i\in E^{(k_i)}$，从而 $x_i\in S^{k_i}X$，因此 $k_i\to\infty$ 时，至少有一子列使 $\mathrm{dist}(x_i,\mathscr{A})\to 0$，因此 $x_*\in\mathscr{A}$，从而 $y_*=S^{N_*}(x_*)\in\mathscr{A}$，这又矛盾于 $y_*\notin M$. 故 M 闭.

我们继续证明 $M=\mathscr{A}\cup\Gamma_\infty$. 由于

$$\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}S^j(E^{(k)})\subset\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}S^j\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E^{(k)}\right)=\bigcup_{j=0}^{\infty}S^j(C_\infty)=\Gamma_\infty$$

故只须证明 $\Gamma_\infty\subseteq M$，即对于 $j\in N$，

$$\overline{S^j\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E^{(k)}\right)}\subseteq\mathscr{A}\cup\bigcup_{j=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}S^j(E^{(k)})\tag{1.37}$$

令 $x_i\in E^{(k)}\subset\bigcup E^{(k)}$ 且 $x_i\to x_*$，由于 $E^{(k)}\subset S^kX$，同前所证推得 $x_*\in\mathscr{A}$，因此在 M 中，由于 $SM\subseteq M$，故有 $S^j(x_*)\in M$. 这

就证明了 $M=\mathscr{A}\cup\Gamma_\infty$.

作为引理 1.2～1.5 的直接推论,有推论

$$d_F(M)\leqslant\max\{\alpha(X),N_0\}.$$

引理1.6 对 X 中每个 x,有

$$\mathrm{dist}(S^k(x),M)\leqslant R\theta^k \tag{1.38}$$

其中,$X\subseteq\overline{B_R(a)}$,$a\in X$,$\theta$ 由引理 1.1 给定,$\theta<1$.

证明 注意到 $S^k(x)\in S^k(X)$,因此存在 $a_{j_1,\cdots,j_k}\in E^{(k)}$,使得

$$\left|S^k(x)-a_{j_1,\cdots,j_k}\right|_H\leqslant\theta^kR \tag{1.39}$$

由构造,$E^{(k)}\subseteq M$,故

$$\mathrm{dist}(S^k(x),M)\leqslant\theta^kR$$

这表明 $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{m\in M}|S^kx-m|_H\leqslant\theta^kR$,从而由集合距离定义有 $\mathrm{dist}(S^kX,M)\leqslant\theta^kR=R\mathrm{e}^{k\lg\theta}=c_0\mathrm{e}^{-c_1k}$,其中 $c_1=\lg\dfrac{1}{\theta}$.

最后由引理 1.2～1.6 得到

定理 1.7 由(1.36)定义的 M 是(S,X)的一个惯性分形集,此外

$$d_F(M)\leqslant\max\{\alpha(X),N_0\}$$

§2 连续动力系统 IFS

本节我们研究如下一类非线性发展方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+R(u)=0 & (2.1)\\ u(0)=u_0 & (2.2)\end{cases}$$

我们假定在一定的条件下,(2.1),(2.2)的整体解存在且唯一,同时存在紧吸收集 B. 为得到 IFS 的存在性,关键是寻求充分小的 t_*,使得 $S(t_*):B_1\to B_1$ 是 Lipschitz 连续且是收缩的,其中 B_1 是紧的正向不变集,一旦选取了 t_*,则可以证明,$M=\bigcup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_*}S(t)M_*$ 就是(2.1)的 IFS. 其中 M_* 为$(S(t_*),B_1)$的

IFS.

定义 紧集 M 称为$(\{S(t)\}_{t\geqslant 0},X)$的 IFS,如果 $\mathscr{A}\subseteq M\subseteq X$,且满足:

1. $S(t)M\subseteq M,\ \forall\, t\geqslant 0$;
2. $d_F(M)<\infty$;
3. 存在正的常数 a_0,a_1 使

$$\operatorname{dist}(S(t)X,M)\leqslant a_0\mathrm{e}^{-a_1t}.$$

设 H 是 Hilbert 空间,A 是正的自共轭线性算子,其逆 A^{-1} 紧.设(2.1),(2.2)定义的非线性半群 $S(t)$关于 t 和H 连续,且存在紧的吸收集 B:

$$B=\{u\in H,|u|_H\leqslant\rho_0\ 且\ \|u\|_{D(A^{\frac{1}{2}})}\leqslant\rho_1\}\tag{2.3}$$

即存在 T,当 $t\geqslant T$ 时,对有界集 $B(0,\rho)$,有 $S(t)B(0,\rho)\subset B$,其中 T 仅与$(|u_0|_H\leqslant\rho)\rho$ 有关.为构造正向紧的不变集 B_1,有

引理 2.1 在上面所述条件之下,存在紧正向不变集 B_1:

$$B_1=\overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}S(t)B}\tag{2.4}$$

证明 只须证明对任何 $\tau\geqslant 0,S(\tau)B_1\subseteq B_1$.事实上,$S(\tau)B_1=S(\tau)\overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}S(t)B}\subseteq\overline{\bigcup_{\tau\leqslant t\leqslant T+\tau}S(t)B}\subseteq\overline{\bigcup_{\tau\leqslant t\leqslant T}S(t)B}\subseteq B_1$,其中已利用 $S(T+\tau)B\subseteq B$.

不失一般,我们设(2.3)定义的 B 就是紧的正向不变集.记 $V=D(A^{\frac{1}{2}})$,$\|\cdot\|=|A^{\frac{1}{2}}\cdot|_H$,省略下标 H.对非线性项 $R(u)$,我们假设 $R:D(A)\to H$ 是连续的,且存在实数 $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$,使得:

$$|R(u)-R(v)|\leqslant c_0|A^{\beta}(u-v)|,\quad\forall\, u,v\in B\tag{2.5}$$

c_0 仅与 B 有关.

命题2.2 在上述假设条件下,存在时间 t_*,使得 $S=S(t_*)$在 B 上 Lipschitz 连续且是收缩的,并且 $\delta<\frac{1}{8}$.

证明 记$\{w_n\}_1^{\infty}$ 为 A 在H 空间特征向量的完备集,$\{\lambda_n\}_1^{\infty}$为相应的特征值,于是 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\nearrow+\infty$;$P_N,H_N,Q_N$ 同

第 4 章所定义. 记 $w(t)=u(t)-v(t)$,其中 $u(t),v(t)$分别是以 u_0,v_0 为始值的(2.1)的两个解. 于是 $w(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+Aw+R(u)-R(v)=0 \tag{2.6}$$

$$w(0)=u_0-v_0=w_0 \tag{2.7}$$

将(2.6)与 w 在H 中取内积,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\|w\|^2+(R(u)-R(v),w)=0 \tag{2.8}$$

利用(2.5),

$$\begin{aligned}|(R(u)-R(v),w)| &\leqslant c_0|A^{\beta}w||w| \\ &\leqslant c_0|w|^{2-2\beta}|A^{\frac{1}{2}}w|^{2\beta} \\ &= c_0|w|^{2-2\beta}\|w\|^{2\beta}\end{aligned}$$

上式已利用内插不等式和 $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. 再利用 Young 不等式,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\frac{1}{2}\|w\|^2\leqslant\frac{1}{2}c_1|w|^2 \tag{2.9}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2\leqslant c_1|w|^2$$

c_1 仅与 c_0,β 有关. 这表明

$$l=\mathrm{lip}_B(S(t))\leqslant \mathrm{e}^{c_1t} \tag{2.10}$$

回到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\|w\|^2\leqslant c_1|w|^2$$

我们引入范商:

$$\lambda(t)=\frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2} \quad 和 \quad \xi(t)=\frac{w(t)}{|w(t)|} \tag{2.11}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+(\lambda(t)-c_1)|w(t)|^2\leqslant 0 \tag{2.12}$$

于是

$$|w(t)|^2 \leqslant |w(0)|^2 \exp\left\{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau + c_1 t\right\} \quad (2.13)$$

微分 $\lambda(t)$,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t) &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2} \\ &= \frac{1}{|w|^2}[(w_t,(A-\lambda(t)w)] \\ &= \frac{1}{|w|}(w_t,(A-\lambda(t))\xi) \\ &= \frac{1}{|w|}(-Aw-(R(u)-R(v)),(A-\lambda)\xi)\end{aligned} \quad (2.14)$$

注意 $(\lambda\xi,(A-\lambda)\xi) = \lambda(\xi,A\xi) - \lambda^2|\xi|^2 = \lambda\|\xi\|^2 - \lambda^2 = \lambda\frac{\|w\|^2}{|w|^2} - \lambda^2 = 0$,因此

$$\begin{aligned}|(A-\lambda)\xi|^2 &= ((A-\lambda)\xi,(A-\lambda)\xi) = (A\xi,(A-\lambda)\xi) \\ &= \frac{1}{|w|}(Aw,(A-\lambda)\xi)\end{aligned} \quad (2.15)$$

结合(2.14),(2.15)有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t) + |(A-\lambda)\xi|^2 &= \frac{1}{|w|}(R(u)-R(v),(A-\lambda)\xi) \\ &\leqslant \frac{1}{|w|}|R(u)-R(v)||(A-\lambda)\xi| \\ &\leqslant \frac{c_0}{|w|}|A^\beta w||(A-\lambda)\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{|w|}c_0|w|^{1-2\beta}\|w\|^{2\beta}|(A-\lambda)\xi| \\ &\leqslant c_0\lambda^\beta|(A-\lambda)\xi| \\ &\leqslant \frac{c_0^2}{2}\lambda^{2\beta} + \frac{1}{2}|(A-\lambda)\xi|^2\end{aligned} \quad (2.16)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t} \leqslant c_0^2\lambda^{2\beta}(t) \leqslant c_3\lambda(t) + c_2 \quad (2.17)$$

其中 c_2, c_3 仅与 β 和 c_0 有关.积分(2.17)有

$$\lambda(t) \leqslant e^{c_3(t-t_0)}\lambda(t_0) - \frac{c_2}{c_3}(1 - e^{c_3(t-t_0)})$$

对 $0 \leqslant t_0 \leqslant t_*$ 反解这不等式,得到

$$\lambda(t_0) \geqslant e^{c_3(t_0-t_*)}\lambda(t_*) - \frac{c_2}{c_3} \tag{2.18}$$

在 $(0, t_*)$ 上积分 t_0,有

$$\int_0^{t_*}\lambda(t_0)dt_0 \geqslant \frac{1}{c_3}(1 - e^{-c_3t_*})\lambda(t_*) - \frac{c_2}{c_3}t_* \tag{2.19}$$

下面证明存在 N_0,使得若有

$$|Q_{N_0}(S(t_*)u - S(t_*)v)| > |P_{N_0}(S(t_*)u - S(t_*)v)|$$

就有

$$|S(t_*)u - S(t_*)v| < \delta|u - v|, \quad \delta < \frac{1}{8}$$

注意

$$\lambda(t_*) = \frac{\| P_{N_0}w(t_*) + Q_{N_0}w(t_*)\|^2}{|P_{N_0}w(t_*) + Q_{N_0}w(t_*)|^2}$$

$$= \frac{\| P_{N}w(t_*)\|^2 + \| Q_{N_0}w(t_*)\|^2}{|P_{N_0}w(t_*)|^2 + |Q_{N_0}w(t_*)|^2}$$

若 $|Q_{N_0}w(t_*)| > |P_{N_0}w(t_*)|$,则

$$\lambda(t_*) > \frac{1}{2}\frac{\| Q_{N_0}w(t_*)\|^2}{|Q_{N_0}w(t_*)|^2} \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$$

故只须证明若 $\lambda(t_*) > \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$,适当选取 N_0,就有 $|w(t_*)| < \delta|w(0)|$,则就证明了收缩性.

回到(2.13),利用 $\lambda(t_*) > \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$ 和(2.19),有

$$|w(t_*)|^2 \leqslant \exp\left\{-\int_0^{t_*}\lambda(\tau)d\tau + c_1t_*\right\}|w(0)|^2$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{c_3}(1-e^{-c_3t_*})\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1} + \frac{c_2}{c_3}t_* + c_1t_*\right\}|w(0)|^2 \tag{2.20}$$

从而

$$\delta_*^2 \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{c_3}(1-e^{-c_3t_*})\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1} + \left(\frac{c_2}{c_3}+c_1\right)t_*\right\} \tag{2.21}$$

取 $t_* = c_3^{-1}$,由 $1-e^{-1}<1$,得到

$$\delta_*^2 \leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2c_3}\lambda_{N_0+1} + \frac{c_1c_3+c_2}{c_3^2}\right\}$$

选取 N_0 适当大,使得

$$\lambda_{N_0+1} \geqslant 4c_3\ln 8 + 4(c_2+c_1c_3)c_3^{-1} \tag{2.22}$$

则 $\delta_*^2<\frac{1}{64}$,从而 $\delta_*<\frac{1}{8}$.此时 $l_* = \mathrm{Lip}_B(S(t_*))\leqslant e^{c_1/c_3}$.

定理2.3 在命题 2.2 同样假设条件下,进一步假设 $F(t,x)=S(t)x$ 是$[0,T]\times B\to B$ 的 Lipschitz 连续映射(对每个 $T>0$),则由(2.1)确定的流$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$容许有惯性分形集 M,其分形维度有如下估计:

$$d_F(M)\leqslant d_F(M_*)+1 \tag{2.23}$$

证明 由命题2.2知 $S(t_*)$在 B 上有 IFS M_*,使得

$$\mathrm{dist}(S^n(t_*),M_*)\leqslant \theta^n R = c_4\delta_*^n \tag{2.24}$$

此外

$$d_F(M_*)\leqslant \max\{N_0,\alpha(B)\}\leqslant N_0\max\{1,c_5\} \tag{2.25}$$

其中 $c_5=\ln\left(\frac{2l_*}{\delta_*}+1\right)\Big/\ln(1/4\delta_*)$.

现在令

$$M=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_*} S(t)M_* \tag{2.26}$$

显然,$M\subseteq B$,由 $F(t,x)$在$[0,T]\times B$ 上连续性知 M 紧,又 $\mathscr{A}\subseteq M_*\subseteq M$,由 Lipschitz 映射函数保持分形维,故 $d_F(M)\leqslant$

$d_F(M_*)+1$. 下面证明在流 $S(t)$作用下 M 的不变性.

如果 $t\in[0,t_*]$,利用 $S(t_*)M_*\subseteq M_*$,有

$$
\begin{aligned}
S(t)M &= \bigcup_{t\leqslant s\leqslant t_*+t} S(s)M_* \\
&= \Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant t_*} S(s)M_*\Big)\cup\Big(\bigcup_{t_*\leqslant s\leqslant t_*+t} S(s)M_*\Big) \\
&\subseteq M\cup\Big(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t} S(s)M_*\Big)\subseteq M \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

如果 $t>t_*$,记 $t=kt_*+s$, $0\leqslant s<t_*$,则

$$
\begin{aligned}
S(t)M &= S(kt_*)S(s)M\subseteq S^k(t_*)M \\
&\subseteq \bigcup_{0\leqslant s\leqslant t_*} S(s)S^k(t_*)M_* \\
&\subseteq \bigcup_{0\leqslant s\leqslant t_*} S(s)M = M \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

最后证明指数吸引性. 对于 $t=kt_*+s$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dist}(S(t)B,M) &= \operatorname{dist}(S(s)S^k(t_*)B,M) \\
&\leqslant l_*\operatorname{dist}(S^k(t_*)B,M) \\
&\leqslant l_*c_4\delta_*^k = (c_4l_*)\delta_*^{\frac{t-s}{t_*}} \\
&\leqslant c_6\delta_0^t = c_6e^{-t\ln\frac{1}{\delta_0}}
\end{aligned}
$$

其中 c_6 仅与 c_1,c_2,c_3 有关, $\delta_0=\delta_*^{c_3}<\left(\frac{1}{8}\right)^{c_3}<1$.

注 1 当 $\beta=\frac{1}{2}$时,可以得到 N_0 更精确的估计. 为简单起见,设存在 $c_\lambda>0,\alpha>0$,使得 $\lambda_N\geqslant c_\lambda N^\alpha$, $\forall N$;然后,如同前面所证,取 $t_*=c_0^{-2}$, $c_2=0$, $c_1=c_3=c_0^2$,因此,仅需假设 $c_\lambda N_0^\alpha>4c_0^2\ln 8+4c_0^2$,即 $N_0>(4c_0^2(\ln 8+1)c_\lambda^{-1})^{1/\alpha}$,即可得到收缩性,进而有 $d_F(M)\leqslant N_0+1$.

§3 NS 方程的 IFS

本节应用§2中给出的方法构造二维Navier-Stokes方程(简

记 NS)的 IFS.

二维 Navier-Stokes 方程周期初边值问题：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\nu Au+B(u,u)=f \tag{3.1}$$

$$u(0)=u_0 \tag{3.2}$$

对于周期情形 A 的特征值满足：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)=w_0 \tag{3.3}$$

下面的结果是已知的：

对于 $u_0\in H(=L^2(\Omega))$，(3.1)～(3.2)边值问题有整体解 $u\in C(R_+,H)\cap L^2(R_+,V)$，而且在 H 中存在紧吸收集 B_0 和整体吸引子 $\mathscr{A}$，使当 $t\geqslant\frac{1}{\nu\lambda_1}$ 时，$S(t)B(0,\rho)\subseteq B_0$.

$$B_0=\{u\in \mathbf{V},\ |u|\leqslant 4G\nu \text{ 和 } \|u\|\leqslant 4G\nu\lambda_1^{1/2}\} \tag{3.4}$$

其中 $G=|f|/\nu^2\lambda_1$. ρ 为任一有限数，$B(0,\rho)$ 为 H 中以原点为中心，ρ 为半径的球. 记 $\rho_0=4G\nu$，$\rho_1=4G\nu\lambda_1^{1/2}$，$s_f=\|f\|/\sqrt{\lambda_1}|f|$.

我们先对 Au 进行估计.

引理3.1 设 $u(t)$是(3.1)的解，$u_0\in B_0$，则 $\forall\, t\geqslant\frac{1}{\nu\lambda_1}$，

$$|Au(t)|\leqslant c_2G^2\nu\lambda_1 \tag{3.5}$$

c_2 是仅与 Ω 有关的常数.

证明 将(3.1)与 A^2u 取内积，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2+\nu|A^{3/2}u|^2\\
&\quad=-(B(Au,u),Au)+(A^{1/2}f,A^{3/2}u)\\
&\quad\leqslant c_1|Au|\,\|Au\|\,\|u\|+|A^{1/2}f|\,|A^{3/2}u|\\
&\quad\leqslant c_1\rho_1|Au|\,|A^{3/2}u|+\|f\|\,|A^{3/2}u|\\
&\quad\leqslant\frac{\nu}{2}|A^{3/2}u|^2+\frac{c_1^2\rho_1^2}{\nu}|Au|^2+\frac{1}{\nu}\|f\|^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|Au|^2 \leqslant 8c_1^2G^2\nu\lambda_1|Au|^2 + s_f^2\nu^3\lambda_1^3G^2 \qquad (3.7)$$

积分(3.7),有

$$|Au(t)|^2 \leqslant |Au(t_0)|^2 + 8C_1^2G^2\nu\lambda_1\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2\mathrm{d}s + s_f^2\nu^3\lambda_1^3G^2(t-t_0) \qquad (3.8)$$

下面估计$\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2\mathrm{d}s$.将(3.1)与$Au$取内积,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leqslant G^2\nu^3\lambda_1^2 \qquad (3.9)$$

从而

$$\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\nu}\|u(t_0)\|^2 + (G\nu\lambda_1)^2(t-t_0) \leqslant 16G^2\nu\lambda_1 + (G\nu\lambda_1)^2(t-t_0)$$

取$t-t_0=\frac{1}{\nu\lambda_1}$,则

$$\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant 17G^2\nu\lambda_1 \qquad (3.10)$$

代入(3.8),有

$$|Au(t)|^2 \leqslant |Au(t_0)|^2 + c'c_1^2(G^2\nu\lambda_1)^2 + s_f^2G^2\nu^2\lambda_1^2$$

两边关于t_0从$t-\frac{1}{\nu\lambda_1}$积分到t,得到

$$\frac{1}{\nu\lambda_1}|Au(t)|^2 \leqslant \int_{t-\frac{1}{\nu\lambda_1}}^{t}|Au(t_0)|^2\mathrm{d}t_0 + c'c_1^2G^4(\nu\lambda_1) + s_f^2G^2\nu\lambda_1 \leqslant 17G^2\nu\lambda_1 + c'G^4c_1^2\nu\lambda_1 + s_f^2G^2\nu\lambda_1$$

因此

$$|Au(t)|^2 \leqslant c''(G\nu\lambda_1)^2[1+G^2+s_f^2] \qquad (3.11)$$

记

$$B = \overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant\frac{1}{\nu\lambda_1}} S(t)B_0} \qquad (3.12)$$

则 B 是 H 中紧不变集，又若 $u\in B$，则有 $|Au|\leqslant c_2G^2\nu\lambda_1$.

下面验证 $S(t)$ 在 B 上 Lip 连续性和收缩性.

记 $w=u_1-u_2$，$u_1,u_2\in B$ 是(3.1)的两个解，于是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+Aw+B(\bar{u},w)+B(w,\bar{u})=0 \tag{3.13}$$

$$w(0)=u_1(0)-u_2(0) \tag{3.14}$$

$$\bar{u}=\frac{1}{2}(u_1+u_2) \tag{3.15}$$

将 w 与(3.13)取内积，利用关于 $(B(u,v),w)$ 公式，

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|w|^2}{\mathrm{d}t}+\nu\|w\|^2\leqslant\frac{\nu}{2}\|w\|^2+8c_1^2(G^2\nu\lambda_1)|w|^2 \tag{3.16}$$

由此可得

$$|w(t)|^2\leqslant|w(0)|^2\exp(16c_1^2G^2\nu\lambda_1t)$$

于是

$$\mathrm{Lip}_B(S(t))\leqslant\exp(8c_1^2G^2\nu\lambda_1t) \tag{3.17}$$

令 $\lambda(t)=\|w(t)\|^2/|w(t)|^2$，由(3.16)，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|w|^2+\nu\lambda(t)|w|^2&\leqslant|(B(w,\bar{u}),w)|\\&\leqslant c_1\|w\|\,|w|\,\|\bar{u}\|\\&\leqslant c_1\lambda^{1/2}(t)|w|^2\|\bar{u}\|\\&\leqslant(4c_1G\nu\lambda_1^{1/2})\lambda^{1/2}(t)|w|^2\end{aligned} \tag{3.18}$$

由此有

$$|w(t)|\leqslant\delta(t)|w(0)|$$

其中

$$\delta(t)=\exp\left\{-\nu\int_0^t[\lambda(\tau)-2c_1G\nu\lambda_1^{1/2}\lambda^{1/2}(\tau)]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.19}$$

取 $t=t_*$，t_* 待定，设 $\lambda_*=\lambda(t_*)>\frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}$，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\lambda(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{|w|^2}(w_t,(A-\lambda(t)w)$$

$$\leqslant -\frac{\nu}{2}|(A-\lambda(t))\xi|^2+\frac{1}{\nu}(|B(\xi,\bar{u})|^2 + |B(\bar{u},\xi)|^2) \tag{3.20}$$

容易得到

$$|B(\xi,\bar{u})| \leqslant c_1\lambda^{1/4}(t)(2\rho_1)^{1/2}|A\bar{u}|^{1/2} \tag{3.21}$$

$$|B(\bar{u},\xi)| \leqslant c_2\left(1+\lg\frac{|A\bar{u}|^2}{\lambda_1\|\bar{u}\|^2}\right)^{1/2}\|\bar{u}\|\lambda^{1/2}(t) \tag{3.22}$$

代入(3.20)且记 $g(t)=4c_1^2\rho_1\nu^{-1}|A\bar{u}(t)|$, $f(t)=c_2^2\nu^{-1}\times\left(1+\lg\frac{|A\bar{u}|^2}{\lambda_1\|\bar{u}\|^2}\right)\|\bar{u}\|^2$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\lambda(t)} \leqslant g(t)+f(t)(\sqrt{\lambda(t)}) \tag{3.23}$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda(t)} &\leqslant \sqrt{\lambda(t_0)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\int_{s}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)g(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s\right)\left[\sqrt{\lambda(t_0)}+\int_{t_0}^{t}g(s)\mathrm{d}s\right]\end{aligned} \tag{3.24}$$

令 $t=t_*$,反解(3.24),有

$$\sqrt{\lambda(t_0)} \geqslant \exp\left(-\int_{t_0}^{t_*}f(s)\mathrm{d}s\right)\sqrt{\lambda_*}-\int_{t_0}^{t_*}g(s)\mathrm{d}s \tag{3.25}$$

注意到

$$\begin{aligned}E=\int_0^{t_*}\lambda(t_0)\mathrm{d}t_0 &\geqslant \frac{1}{t_*}\left[\int_0^{t_*}\sqrt{\lambda(t_0)}\mathrm{d}t_0\right]^2 \\ &\geqslant \frac{1}{t_*}\left[\int_0^{t_*}\exp\left(-\int_{t_0}^{t_*}f(s)\mathrm{d}s\right)\sqrt{\lambda_*}\mathrm{d}t_0 \right. \\ &\quad \left. -\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t_0\right]^2\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}g(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t_0=4c_1^2\rho_1\nu^{-1}\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}|A\bar{u}(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t_0$$

$$\leqslant 4c_1^2\rho_1\nu^{-1}\int_0^{t_*}(t_*-t_0)^{1/2}(17G^2\nu\lambda_1)^{1/2}\mathrm{d}t_0$$

$$=\frac{3}{2}c'c_1^2G^2\nu^{1/2}\lambda_1t_*^{3/2} \tag{3.27}$$

$$\lambda_*^{1/2}\int_0^{t_*}\exp\left(-\int_{t_0}^{t_*}f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t_0\geqslant\lambda_*^{1/2}\int_0^{t_*}\mathrm{e}^{-\beta(t_*-t_0)}\mathrm{d}t_0$$

$$=\frac{\lambda_*^{1/2}}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t_*}) \tag{3.28}$$

其中

$$\beta=c_2^2\nu^{-1}\sup_{u\in B}\|u\|^2\left(1+\lg\frac{|Au|^2}{\lambda_1\|u\|^2}\right) \tag{3.29}$$

对 β 有如下估计:

由 $\|u\|^2\leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1$ 和 $|Au|^2\leqslant(c_2G^2\nu\lambda_1)^2$,注意到

$$\varphi(x,y)=x\left(1+\lg\frac{y}{x}\right),\quad 0\leqslant x\leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1,$$
$$0\leqslant y\leqslant c_2^2G^4\nu^2\lambda_1$$

如果 $x\geqslant(G^4\nu^2\lambda_1)^{-1}$,则

$$\varphi(x,y)\leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1(\lg c_2(G^4\nu^2\lambda_1)^2+1)$$
$$\leqslant c_3G^2\nu^2\lambda_1(1+\lg G^4\nu^2\lambda_1)$$

如果 $x<(G^4\nu^2\lambda_1)^{-1}\leqslant 1$ 则

$$\varphi\leqslant x\left(\lg y+\lg\frac{1}{x}+1\right)\leqslant(1+\lg y)+x\lg\frac{1}{x}$$
$$\leqslant c_3G^2\nu^2\lambda_1(1+\lg G^4\nu^2\lambda_1)$$

从而有

$$\beta\leqslant c_3G^2\nu\lambda_1(1+\lg G^4\nu^2\lambda_1) \tag{3.30}$$

从而

$$E=\int_0^{t_*}\lambda(t_0)\mathrm{d}t_0$$
$$\geqslant\frac{1}{t_*}\left[\frac{\lambda_*^{1/2}}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t_*})-c''c_2^2G^2\nu^{1/2}\lambda_1t_*^{3/2}\right]^2 \tag{3.31}$$

对 δ_* 的指数中第二项利用 Young 不等式,利用(3.31)得到

$$\delta_* \leqslant \exp\left\{-\frac{\nu}{2}\int_0^{t_*}\lambda(\tau)\mathrm{d}\tau + 2c_1^2G^2\nu\lambda_1 t_*\right\}$$

$$\leqslant \exp\left\{-\frac{\nu}{2t_*}\left[\frac{\lambda_*^{1/2}}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta t_*})\right.\right.$$

$$\left.\left. - c''c_1^2G^2\nu^{1/2}\lambda_1 t_*^{3/2}\right]^2 + 2c_1^2G^2\nu\lambda_1 t_*\right\}$$

取 $t_* = \beta^{-1} = [c_3G^2\nu\lambda_1(1+\lg G^4\nu^2\lambda_1)]^{-1}$,

$$\delta_* \leqslant \exp\left\{-\frac{c_4}{2}\nu\beta^{-1}\lambda_* + c_6G^4\nu^2\lambda_1^2\beta^{-2} + 2c_1^2G^2\nu\lambda_1\beta^{-1}\right\} \tag{3.32}$$

再由 $\lambda_* \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1} \approx w_0\lambda_1 N_0$,为使 $\delta_* < \frac{1}{8}$,取

$$N_0 \geqslant c_7\max\left\{\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^4\nu^2\lambda_1^2}{\beta^2}\cdot\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^2\nu\lambda_1}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\nu\lambda_1}\right\}$$

$$= c_7\max\left\{\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^4\nu\lambda_1}{\beta}, G^2\right\}$$

$$\geqslant c_8G^2(1+\lg G^4\nu\lambda_1) \tag{3.33}$$

于是有 $l_* = \mathrm{Lip}_B(S(t_*)) \leqslant \exp c_9(1+\lg G^4\nu^2\lambda_1)^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{c_{10}}$,最后有

命题3.1 如果 $f\in V$,则对于 $2D$ N－S 方程的周期边值问题在 B 中有 IFS M,且

$$dF(M) \leqslant c_8G^2(1+\lg G^4\nu\lambda_1) + 1 \tag{3.34}$$

$$\mathrm{dist}(S(t)B, M) \leqslant c_{11}\mathrm{e}^{-c_{12}\beta t} \tag{3.35}$$

§4 无界域上耗散发展方程 IFS

在§1我们给出的指数吸引子存在性证明中,有两点是最基本的,其一是必须找到一个紧的正向不变集,其二必须证明 $S(t)$ 的挤压性,而挤压性证明是以对线性算子 A 的直交谱分解为条件的.但对无界域上耗散发展方程,由于嵌入的紧性遇到困难且算子 A 不再具有离散谱,因此上述两点的证明都显得十分困难,1995年,A.V.Babin 和 N.Nicolaenko 修正了"紧正向不变集"条件,引

入带权空间构造一类紧算子,从而解决了无界域上指数吸引子存在性问题.作为应用,得到一类无界域上反应扩散方程的指数吸引子.

在本节中我们沿用§1中的记号.

定理4.1 设 X 是 Hilbert 空间 H 中一闭的不变集,使得存在有限多个半径为1的小球对 X 的覆盖,又设 $\{S_t\}$ 在 H 上有整体吸引子,对某一固定的 $t>0$, S_t 在 X 上有强挤压性和一致 Lipschitz 连续性,则 $\{S_t^k\}$ 在 X 上有一个指数吸引子.

证明 在本章第一节引理1.1至引理1.6的证明中,关于 X 的紧性假设主要用于存在半径为 a 的球对 X 进行覆盖以及 C_∞ 的紧性证明,因此本定理的证明中只须说明在定理4.1假设条件下,定理1.7的结论仍然成立就行了.

令 X 如定理4.1所设,于是在 Hilbert 空间 H 中存在中心在 $a\in X$,半径为 r 的球 $\overline{B}_r(a)$ 覆盖 X,记

$$Z = S(\overline{B}_r(a)\cap X)$$

其中 $S=S_t$, t 固定.令 E 是 Z 中满足如下锥条件的最大点集:

$$|u-v|_H\leqslant\sqrt{2}\left|P_{N_0}(u-v)\right|_H,\quad \text{对所有 } u,v\in E \tag{4.1}$$

所谓"最大点集"指不存在 $N\in Z/E$ 使(4.1)对所有的 $u\in E$ 成立.由(4.1)知 E 是 N_0 维空间 $P_{N_0}M$ 的有界子集上 Lipschitz 函数的图像,因此 E 是准紧的.基本引理1.1估计半径为 $\theta r(2\delta<\theta<1)$ 的小球覆盖 Z 的数量 k_0 的证明中未利用 X 的紧性,而仅利用 $P_{N_0}Z$ 的准紧性,指数吸引子的构造反复利用 S^kX, $k\geqslant1$ 的递归覆盖,由引理1.1

$$S(\overline{B}_R(a)\cap X)\subset\bigcup_{j_1=1}^{k_0}\overline{B}_{\theta R}(a_{j_1})\cap SX \tag{4.2}$$

$a_{j_1}\in E=E_{1,a}$.以同样的方法对每个 a_{j_1},考虑

$$S\left(\overline{B}_{\theta R}(a_{j_1})\cap SX\right)$$

且用有限多个中心在 $a_{j_1,j_2}\in E_{2,j_1}$，半径 θ^2R 的小球 $B_{\theta^2R}(a_{j_1,j_2})$ 覆盖这个集合，重复构造 k 次，我们得到极大集 $E_{k+1,j_1\cdots j_k}$ 和中心在 $E_{k,j_1\cdots j_{k-1}}$ 的小球 $\overline{B}_{\theta^kR}(a_{j_1\cdots j_k})$ 对 S^kX 的覆盖. 注意所有 $E_{k+1,j_1\cdots j_k}$ 都是 $P_{N_0}M$ 中有界集上的 Lipschitz 图像，因此是准紧的. 覆盖元个数的估计并未利用 X 的紧性，它明显地利用了挤压性. 令

$$E^{(k)}=\bigcup_{\substack{j_1=1\\ \vdots\\ j_{k-1}=1}}^{k_0} E_{k,j_1\cdots j_{k-1}}\subset S^kX \tag{4.3}$$

注意到每个 $E^{(k)}$ 是有限多个准紧集的并，因此，它也是准紧的.

引理 1.3 表明集合：

$$C_\infty=\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}E^{(k)}} \tag{4.4}$$

有有限分形维. 这引理的证明利用 X 的有限覆盖，它的证明是通过覆盖 C_∞ 小球数量的直接计算而未利用紧性，注意集合 A 的分形维定义：

$$d_F(A)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N_\varepsilon(A)}{\lg(1/\varepsilon)}$$

其中 $N_\varepsilon(A)$ 表示半径为 ε 小球覆盖 A 的数量.

我们有，对任何 $c>0$

$$d_F(A)=\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\lg N_{c\varepsilon}(A)}{\lg(1/\varepsilon)} \tag{4.5}$$

于是对于准紧集 A，有 $d_F(A)=d_F(\overline{A})$，这表明对准紧集 $E^{(k)}$ 而定义的 C_∞，引理 1.3 仍成立.

注意到 $C_\infty=\overline{\bigcup_{k=1}^{N^*}E^{(k)}}\cup S^{N^*}(X)$，由于当 $N^*\to\infty$ 时，$\mathrm{dist}(S^{N^*}(X),\mathscr{A})\to 0$ 以及有限多个准紧集的并是准紧的，我们容易证明 C_∞ 是紧的. 其中 $\mathscr{A}$ 是紧吸引子.

由于 C_∞ 的紧性，引理 1.4～1.6 以及定理 1.7 都成立. 这就证明了定理 4.1.

作为应用,我们研究无界域上反应扩散方程组的指数吸引子.

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) + \lambda_0 u - g = 0 \tag{4.6}$$

其中 $u=(u^1,\cdots,u^m)$, $f=(f^1,\cdots,f^m)$, $g=(g^1,\cdots,g^m)$, $\lambda_0>0$, $g=g(x)$, $u=u(t,x)$, $x\in R^n$,非线性 f 满足条件:

$$f(u)u \geqslant 0 \tag{4.7}$$

$$f(0) = f'(0) = 0, f'(u) \geqslant -CI \tag{4.8}$$

$$|f'(u) - f'(v)| \leqslant c|u-v|^{\alpha}(1+|u|+|v|)^{q_0}$$

$$|f(u)| \leqslant c_1|u|^{1+\alpha_1}(1+|u|)^{q_1} \tag{4.9}$$

其中 $q_1, q_0, \alpha, \alpha_1>0$,且对于 $n>2$,

$$q_0 + \alpha \leqslant p_0, \quad q_1 + \alpha_1 \leqslant p_0, \quad p_0 = \min\left(\frac{4}{n}, \frac{2}{n-2}\right) \tag{4.10}$$

当 $n\leqslant 2$ 时, $p_0=\dfrac{4}{n}$,又设

$$\| g \|_{0,\gamma} = \left(\int (1+|\varepsilon x|^2)^{\gamma} |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} < \infty \tag{4.11}$$

其中 $\varepsilon>0$ 充分小,但是固定的数.(4.11)定义了 Hilbert 空间 $H_{0,\gamma}$上范数.我们将利用带权 Sobolev 空间 $H_{l,\gamma}$, $l=1,2$,范数记为 $\|\cdot\|_{l,\gamma}$,由下式定义:

$$\| u \|_{l,\gamma}^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant l} \| \partial^{\alpha} u \|_{0,\gamma}^2 \tag{4.12}$$

考虑初值问题:

$$u|_{t=0} = u_0, u_0 \in H_{1,\gamma} \tag{4.13}$$

成立如下结论[119,120]:

定理 4.2 (i)存在(4.6),(4.13)的唯一解 u,且 $u\in L_2([0,T],H_{2,\gamma})\cap L_{\infty}([0,T],H_{1,\gamma})$

以及

$$(1+|x|^2)^{\gamma/2}\partial_t u \in L_2([0,T],(H_{0,\gamma})^*), \quad \text{对任何 } T>0$$

(ii)映射

$$S_t : u_0 \to u(t)$$

形成 $H_{0,\gamma'}$ 和 $H_{1,\gamma'}$ 上的半群 $\{S_t\}$，对任何 $\gamma' \in [0,\gamma]$.

(iii)对任何 $0 \leqslant \gamma' \leqslant \gamma$，$S_t$ 从 $H_{0,\gamma'}$ 到 $H_{0,\gamma'}$ 是连续算子，且从 $(H_{1,\gamma'})_w$ 到 $(H_{1,\gamma'})_w$ 也是连续的(即 $H_{1,\gamma'}$ 的弱拓扑).

(iv) $S_t: H_{0,\gamma} \to H_{0,\gamma}$ 有不变吸收集 B_4，B_4 在 $H_{2,\gamma}$ 中有界，在 B_4 上 S_t 关于 $H_{0,\gamma}$ 拓扑是连续的. 存在紧集 $B_5 \subset H_{0,\gamma}$，使得如 $u_0 \in B_4$，则 $\mathrm{dist}(S_t u_0, B_5) \leqslant c e^{-\beta t}$，$\beta > 0$.

(v)在 $H_{0,\gamma}$ 上，S_t 存在整体吸引子 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 有有限 Hausdorff 维度.

下面我们研究(4.6)，(4.13)在 $H_{0,\gamma}$ 中指数吸引子的存在性.

引理 4.3 存在不变集 $X \subset B_4 \subset H_{0,\gamma}$，使得能为有限个单位球所覆盖.

证明 由定理 4.2(iv)，存在紧集 $B_5 \subset H_{0,\gamma}$，使得如果 $u_0 \in B_4$，则有

$$\mathrm{dist}(S_t u_0, B_5) \leqslant c e^{-\beta t}$$

其中 c 与 u_0 无关. 令 $\{O_{1/2}(z_j)\}$ 是中心 $z_j \in B_4$，半径为 1/2 闭球对 B_5 的有限覆盖. 令 $O_1(z_j)$ 是单位球，如果 t' 充分大使得 $c e^{-\beta t'} \leqslant 1/2$，则 $S_{t'} B_4 \subset \bigcup O_1(z_j)$，我们置 $X = \overline{S_{t'} B_4}$，由 B_4 不变性，$X \subset B_4$ 也是不变的且为有限个 $O_1(z_j)$ 覆盖.

为证明 S_t 挤压性，引入权函数 $\varphi = (1 + |\varepsilon x|^2)^\gamma$. 设 $u(t)$，$v(t)$ 是(4.6)，(4.13)的两个解，$u_0, v_0 \in B_4$，于是对任何 $t \geqslant 0$，$u(t), v(t) \in B_4$，且在 $H_{2,\gamma}$ 中关于 t 一致有界，令 $w(t) = u(t) - v(t)$，于是 $w(t)$ 满足

$$\partial_t w - \Delta w + \lambda_0 w + F(u,v) w = 0 \tag{4.14}$$

$$F(u,v) = (f(u) - f(v))/(u - v) \tag{4.15}$$

由关于 f 假设，有

$$|F(u,v)| \leqslant (|u|^{\alpha_0} + |v|^{\alpha_0})(1 + |u|^{q_2} + |v|^{q_2}) \tag{4.16}$$

其中 $\alpha_0 > 0$，$q_2 \geqslant 0$，且当 $n \geqslant 4$ 时，$\alpha_0 + q_2 \leqslant p_3$，$p_3 \leqslant \frac{2}{n-4}$(当 $n > 4$)，当 $n \leqslant 3$ 时，p_3 任意. 我们研究(4.14)如下始值条件：

$$w|_{t=0}=w(0),\ \|w\|_{0,\gamma}=1 \tag{4.17}$$

将(4.14)作如下分解：$w=w_0+w_1$

$$\partial_t w_0-\Delta w_0+\lambda_0 w_0=0,\ w_0|_{t=0}=w(0) \tag{4.18}$$

$$\partial_t w_1-\Delta w_1+\lambda_0 w_1+F(u,v)w_1+F(u,v)w_0=0 \tag{4.19}$$

$$w_1|_{t=0}=0 \tag{4.20}$$

引理4.4 成立如下估计：

$$\|w_0(t)\|_{0,\gamma}\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda_0 t/2}\|w_0(0)\|_{0,\gamma},\quad \forall t\geqslant 0 \tag{4.21}$$

$$\int_0^t(\|\nabla w_0(t)\|_{0,\gamma}^2+\lambda_0\|w_0\|_{0,\gamma}^2)\mathrm{d}t+\|w_0(t)\|_{0,\gamma}^2 \leqslant \|w_0(0)\|_{0,\gamma}^2 \tag{4.22}$$

证明 用 φ 乘(4.18)，积分，利用 $\nabla\varphi\leqslant\varepsilon\varphi$，有

$$\partial_t(\varphi w_0,w_0)+2(\varphi\nabla w_0,\nabla w_0)+2\lambda_0(\varphi w_0,w_0) \leqslant c\varepsilon\|\varphi^{1/2}w_0\|\,\|\varphi^{1/2}\nabla w_0\| \tag{4.23}$$

选取 ε 充分小，有

$$\partial_t(\varphi w_0,w_0)+(\varphi\nabla w_0,\nabla w_0)+\lambda_0(\varphi w_0,w_0)\leqslant 0 \tag{4.24}$$

由(4.24)立得(4.21)，(4.22).

引理4.5 令 $t_0>0$，$\|w_0\|_{0,\gamma}\leqslant R$，$w_1$ 是(4.19)，(4.20)的解，则存在与 u_0,v_0 无关的常数 M_0，使

$$\|w_1(t_0)\|_{1,\gamma}\leqslant M_0 \tag{4.25}$$

证明 用 φw_1，$\varphi=\psi^2$，乘(4.19)积分，有

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\psi w_1\|^2+\|\psi\nabla w_1\|^2+\lambda_0\|\psi\nabla w_1\|^2 \leqslant |(\psi^2 F w_1,w_1)|+|(\psi^2 F w_0,w_1)| \tag{4.26}$$

由

$$|(\psi F w_0,\psi w_1)|\leqslant\|\psi w_0\|_{L^p}\|\psi w_1\|_{L^p}\|F\|_{L^r} \tag{4.27}$$

其中 $\frac{2}{p}+\frac{1}{r}=1$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$，$H_1\searrow L^p$，而 $\frac{1}{r}=\frac{2}{n}$，注意当 $n>4$

时，$H_2 \searrow L^q, \frac{1}{q} \geqslant \frac{n-4}{2n}$，由关于 α_0, q_2 假设条件及 $u, v \in H_2$，我们有

$$
\begin{aligned}
|(\psi F w_0, \psi w_1)| &\leqslant c \|\nabla(\psi w_0)\| \|\nabla(\psi w_1)\| \\
&\leqslant c \|\psi \nabla w_0\| \|\psi \nabla w_1\| \\
&\quad + c_1 \varepsilon \|\psi w_0\| \|\psi \nabla w_1\| \\
&\quad + c_1 \varepsilon \|\psi \nabla w_0\| \|\psi w_1\| \\
&\quad + c_1 \varepsilon^2 \|\psi w_0\| \|\psi w_1\| \\
&\leqslant \frac{1}{4} \|\psi \nabla w_1\|^2 + c_2 \varepsilon \|\psi w_1\|^2 \\
&\quad + c_3 (\|\psi \nabla w_0\|^2 + \|\psi w_0\|^2) \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

类似有

$$
|(\psi F w_1, \psi w_1)| \leqslant \frac{1}{4} \|\psi \nabla w_1\|^2 + c^1 \|w_1\|_{0,\gamma}^2 \qquad (4.29)
$$

如 ε 适当小，有

$$
\begin{aligned}
\|\psi \nabla w_1\|^2 + \|\psi w_1\|^2 &\leqslant \|\psi w_1\|_{1,0}^2 \\
&\leqslant 2 \|\psi \nabla w_1\|^2 + \|\psi w_1\|^2
\end{aligned}
$$

利用(4.26)～(4.28)有

$$
\|\psi w_1(t)\|^2 - \|\psi w_1(0)\|^2 + \int_0^t \|\psi \nabla w_1(\tau)\|^2 d\tau
$$

$$
\leqslant c_4 \int_0^t \|w_1(\tau)\|_{0,\gamma}^2 d\tau + c_5 \int (\|\psi \nabla w_0\|^2 + \|\psi w_0\|^2) d\tau
$$

利用(4.21)，(4.22)和 Gronwall 不等式，推得

$$
\|\psi w_1(t)\| \leqslant c_6, \int_0^t \|\psi \nabla w_1(\tau)\|^2 d\tau \leqslant c_7 \qquad (4.30)
$$

其中 c_6, c_7 仅与 t 有关.

现在用 $-t\psi^2 \Delta w_1$ 与(4.19)相乘，积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \partial_t (t \|\psi \nabla w_1\|^2) + \partial_t (t(w_1 \nabla \psi, \psi \nabla w_1)) \\
&\quad + t \|\psi \nabla w_1\|^2 - (\psi^2 \nabla w_1, w_1)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \frac{t}{2}\|\psi\nabla w_1\|^2 + t\|\psi F w_1\|^2$$
$$+ t\|\psi F w_0\|^2 + \lambda_0 c\|\psi w_1\|^2 \qquad (4.31)$$

分部积分，我们得到

$$t(w_1\nabla\psi,\psi\nabla w_1) = \frac{t}{2}(\psi\nabla\psi,\nabla(w_1)^2)$$
$$= -\frac{t}{2}(\nabla(\psi\nabla\psi)w_1,w_1) \qquad (4.32)$$

注意

$$\|Fw_1\|^2 \leqslant \|F\|_{L^{2r}}^2\|w_1\|_{L^p}^2$$

于是

$$\|\psi F w\|^2 \leqslant c\|\nabla(\psi w)\|^2$$
$$\leqslant 2c\|\psi\nabla w\|^2 + c_1\varepsilon\|\psi w\|^2 \qquad (4.33)$$

关于 t 在$(0,T)$上积分(4.31)，利用(4.32)，(4.33)，有

$$t\|\psi\nabla w_1\|^2 - t(\nabla(\psi\nabla\psi)w_1,w_1) + \int_0^t \tau\|\psi\nabla w_1\|^2 d\tau$$
$$\leqslant c_2\int_0^t \tau\|\psi\nabla w_1\|^2 d\tau + c_3\int_0^t \varepsilon[\|\psi\nabla w_0\|^2 + \|\psi w_0\|^2]d\tau$$
$$+ c_4\int_0^t[\|\psi\nabla w_1\|^2 + 2(\psi\nabla w_1, w_1\nabla\psi)]d\tau \qquad (4.34)$$

由(4.30)得到(4.34)右边最后一个积分的估计，右边第 2 式估计由(4.21)，(4.22)给出，利用$|\partial^\alpha\varphi| \leqslant c\varepsilon^{|\alpha|}\varphi$ 得到左边第二式估计，因此由(4.34)推得

$$t\|\psi\nabla w_1\|^2 \leqslant c_2\int_0^t \tau\|\psi\nabla w_1\|^2 d\tau + c_5$$

利用 Gronwall 不等式推得：

$$t\|\psi\nabla w_1\|^2 \leqslant c_6, \quad \forall t\in[0,T]$$

引理4.6 设$\|w(0)\|_{0,\gamma}\leqslant 1$，对任何 $u_0, v_0\in B_4, t\geqslant 0$，存在 $M_2 = M_2(t)$，使得：

$$\|w_1(t)\|_{0,\gamma(\alpha_0+1)} \leqslant M_2 \qquad (4.35)$$

证明 用 φw_1 乘(4.19)积分,其中 $\varphi=\varphi(x,\varepsilon,\rho,2\gamma')$, $\gamma'=(\alpha_0+1)\gamma$. 令 $\psi=\varphi^{1/2}$, ε 是小参数, φ 满足如下条件:

$$\varphi(x,\varepsilon,\rho,\gamma)\geqslant 1,\ \varphi(\varepsilon x,1,\rho,1)^\gamma=\varphi(x,\varepsilon,\rho,\gamma)$$

$$|\partial^\alpha\varphi(x,\varepsilon,\rho,\gamma)|\leqslant c\varepsilon^{|\alpha|}\varphi(x,\varepsilon,\rho,\gamma)$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\varphi(x,1,\rho,\gamma)=(1+|x|^2)^\gamma$$

置 $\psi=\psi_1\psi_2$, $\psi_1=\varphi(x,\varepsilon,\rho,\gamma)$, $\psi_2=\varphi(x,\varepsilon,\rho,\alpha_0\gamma)$,我们有

$$\frac{1}{2}\partial_t\|\psi w_1\|^2+(\nabla w_1,\psi^2\nabla w_1)+(\nabla w_1,w_1\nabla\psi^2)$$

$$+\lambda_0\|\psi w_1\|^2+(F\psi^2w_1,w_1)+(F\psi^2w_1,w_0)=0 \quad (4.36)$$

利用

$$|(Fw_1,w_1)|\leqslant\|w_1\|^2_{L^{p'}}\|F\|_{L^{r'}}$$

$p'<p$, $r'>r$ 是分别任意接近 p, r 的数,利用 Sobolev 嵌入定理和内插不等式,得到

$$|(F\psi w_1,\psi w_1)|\leqslant\frac{1}{4}\|\psi\nabla w_1\|^2+c_3\|\psi w_1\|^2 \quad (4.37)$$

类似估计 $|(F\psi w_1,\psi w_0)|$

$$|(F\psi w_1,\psi w_0)|\leqslant c((|\psi_2^{1/\alpha_0}u|^{\alpha_0}+|\psi_2^{1/\alpha_0}v|^{\alpha_0})|w_0|\psi_1,\psi|w_1|)$$

$$+c((|\psi_2^{1/\alpha_0}u|^{\alpha_0}+|\psi_2^{1/\alpha_0}v|^{\alpha_0})(|u|^{q_2}+|v|^{q_2})$$

$$|w_0|\psi_1,\psi|w_1|) \quad (4.38)$$

对(4.38)右边利用指数为 p', p', r' 的 Holder 不等式和 p_3r, p_3r, p, p 为指数的 Holder 不等式,可以得到

$$|(F\psi w_1,\psi w_0)|\leqslant c(\|\nabla\psi_1w_0\|+\|\psi_1w_0\|)$$

$$(\|\psi_2\nabla w_1\|+\|\psi_2w_1\|)$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\|\psi_2\nabla w_1\|^2+c\|\psi_2w_1\|^2$$

$$+c(\|\nabla\psi_1w_0\|^2+\|\psi_1w_0\|^2) \quad (4.39)$$

结合上述估计我们得到

$$\partial_t\|\psi w_1\|^2+\|\psi\nabla w_1\|^2$$

$$\leqslant c_9\|\psi w_1\|^2+c_{10}(\|\nabla\psi_1w_0\|^2+\|\psi_1w_0\|^2) \quad (4.40)$$

积分(4.40),令 $\rho\to+\infty$,得到(4.35).

现在,我们可以证明 S_t 在 $H_{0,\gamma}$上挤压性:

引理4.7 对任何 $\delta>0$,存在 t_0 和 N,使得算子 $S_t, t=t_0$,在 B_4 上有 $H_{0,\gamma}$空间中的强挤压性.

证明 由引理 4.4~4.6,有

$$\| w_1(t) \|_{1,\gamma}^2 + \| w_1(t) \|_{0,\gamma(1+\alpha_0)}^2 \leqslant M_0^2 + M_2^2 \tag{4.41}$$

上式左边可写为$(Lw_1, w_1)\leqslant M_0^2+M_2^2$,$L$ 是由二次型定义的算子,由于 $\gamma\alpha_0>0$,由(4.41)定义的集合在 $H_{0,\gamma}$中紧,因此 L^{-1}是 $H_{0,\gamma}$上紧算子.由于(4.41)左边是 w_1 的二次泛函,它在 $H_{0,\gamma}$中定义了椭球.

$$B = \{w_1 \mid \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(w_1, e_j)_\gamma^2 \leqslant M_0^2 + M_2^2 = R_1^2\} \tag{4.42}$$

其中$\{e_j\}$是在 $H_{0,\gamma}$中的正交基,e_j 是L 的特征函数,当 $j\to\infty$时,$\mu_j\to+\infty$(单调地趋于$+\infty$).令 N 充分大,使得

$$\mu_N \geqslant 16R_1^2/\delta^2 \tag{4.43}$$

令 $E_N=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_N\}$,$P_N$ 是到E_N 上的正交投影算子.显然,如果 $w_1\in B$,

$$\begin{aligned}\| (I-P_N)w_1 \|_{0,\gamma}^2 &= \sum_{j=N+1}^{\infty}(w_1, e_j)_\gamma^2 \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_N}R_1^2 \leqslant \delta^2/16\end{aligned} \tag{4.44}$$

令

$$B_1 = \{u\in B, \| P_N u \|_{0,\gamma} \geqslant 3\delta/4\}, B_2 = B/B_1 \tag{4.45}$$

让 $w_1=w_1(t)\in B_1$,则由(4.17),(4.18),(4.21),选取 t 使得

$$e^{-\frac{\lambda_0 t}{2}} \leqslant \delta/8$$

再由 B_1 定义,有

$$\begin{aligned}\| P_N w \|_{0,\gamma} &= \| P_N(w_0+w_1) \|_{0,\gamma} \\ &\geqslant \| P_N w_1 \|_{0,\gamma} - \| P_N w_0 \|_{0,\gamma} \\ &\geqslant 3\delta/4 - \delta/8 > \delta/2\end{aligned} \tag{4.46}$$

利用(4.21),

$$\| w_0(t) \|_{0,\gamma} \leqslant \| w(0) \|_{0,\gamma} e^{-\frac{\lambda_0 t}{2}} \leqslant \delta/8 \qquad (4.47)$$

另一方面,由(4.44),

$$\begin{aligned} \| (I - P_N) w \|_{0,\gamma} &= \| (I - P_N) w_0 \|_{0,\gamma} + \| (I - P_N) w_1 \|_{0,\gamma} \\ &\leqslant \| w_0(t) \|_{0,\gamma} + \delta/4 \\ &\leqslant \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} \| w(0) \|_{0,\gamma} \qquad (4.48) \end{aligned}$$

结合(4.46),(4.48),我们有

$$\| (I - P_N) w \|_{0,\gamma} \leqslant \| P_N w \|_{0,\gamma}, \quad \text{如 } w \in B_1 \qquad (4.49)$$

现在令 $w_1 \in B \setminus B_1$,我们有

$$\begin{aligned} \| w_1 \|_{0,\gamma}^2 &= \| (I - P_N) w_1 \|_{0,\gamma}^2 + \| P_N w_1 \|_{0,\gamma}^2 \\ &\leqslant \frac{\delta^2}{16} + \frac{9\delta^2}{16} = \frac{5\delta^2}{8} \qquad (4.50) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \| w \|_{0,\gamma} &\leqslant \| w_0 \|_{0,\gamma} + \| w_1 \|_{0,\gamma} \\ &\leqslant \delta \sqrt{10}/4 + \delta/8 \\ &\leqslant \delta = \delta \| w(0) \|_{0,\gamma} \qquad (4.51) \end{aligned}$$

由(4.49)和(4.51)表明,或者有

$$\| (I - P_N) w \|_{0,\gamma} \leqslant \| P_N w \|_{0,\gamma}$$

或者

$$\| w \|_{0,\gamma} \leqslant \delta \| w(0) \|_{0,\gamma}$$

这正是要证的挤压性.

由引理 4.6 及定理 4.1(iv),应用定理 4.2,立刻得到方程(4.6)在 $H_{0,\gamma}$中存在指数吸引子.

§5 弱耗散发展方程 IFS

对于弱耗散发展方程,由于一般地仅存在弱紧吸引子,而且耗散项不能控制非线性项,因此在研究 IFS 时,对收缩性质的论证会

遇到麻烦，本节我们基于空间谱分解技术，引入一类等价范，较好地解决了这一问题，应用于非线性 Schrödinger 方程和弱耗散 KdV 方程，得到了 IFS 的存在性和分形维度的上界估计，特别，我们借助于 § 4 中的思想，解决了非线性波方程 (E,E) 型指数吸引子的存在性问题.

设 $D(A)\subset V$，$D(A)$ 紧嵌入 V，$D(A)$ 和 V 均为 Hilbert 空间. 我们研究

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Au+g(u)=f(x),t>0,x\in\Omega \tag{5.1}$$

$$u(0)=u_0 \tag{5.2}$$

Dirichlet 零边值问题或周期边值问题 (5.3)

其中 A 同 § 2 所设，$\{\lambda_N\}_1^\infty$ 是 A 的特征值集合.

命题 5.1 设 (5.1) ~ (5.3) 有唯一整体解 $u\in C_w(R_+,D(A))$（在 $u_0\in D(A)$ 情形），当 $u_0\in V$ 时 $u\in C(R_+,V)$，此外设在 $D(A)$ 和 V 中存在相应闭吸收集 B_0,B_1，则由 (5.1) ~ (5.3) 定义的非线性半群 $S(t)$ 具有一个 $(D(A),V)$ 型紧吸引子.

$$\mathscr{A}=\overline{\bigcap_{t\geqslant 0}S(t)B_0} \tag{5.4}$$

$\mathscr{A}$ 在 $D(A)$ 中有界. 其中 C_w 表示以 $D(A)$ 拓扑关于 t 弱连续.

证明 如所周知 $\mathscr{A}$ 是 $D(A)$ 中弱紧吸引子，且在 $D(A)$ 弱拓扑意义下吸引 $D(A)$ 中所有有界集，由于 Hilbert 空间中弱有界性等价于强有界性，我们推得 $\mathscr{A}$ 在 $D(A)$ 中是有界集，由 $D(A)$ 紧嵌入 V 知 $\mathscr{A}$ 在 V 中紧. 设 B 是 $D(A)$ 中任何有界集，由于 $\mathscr{A}$ 以 $D(A)$ 弱拓扑吸引 $D(A)$ 中每一有界集，可选取子列 $S(t_n)B$，当 $t_n\to\infty$ 时在 $D(A)$ 中弱收敛到 $\mathscr{A}$，从而 $S(t_n)B$ 在 V 中强收敛到 $\mathscr{A}$，这表明 $\mathscr{A}$ 是 $(D(A),V)$ 型紧吸引子.

注 $\mathscr{A}$ 称为 $S(t)$ 的 $(D(A),V)$ 型紧吸引子，如果在 V 中存在一个紧集 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 吸引 $D(A)$ 中所有有界子集，且在 $S(t)$ 作用下是不变集.

命题 5.2 存在 $t_0(B_0)$，使得

$$B = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_0(B_0)} S(t)B_0 \tag{5.5}$$

是 V 中紧正向不变集,且是 $D(A)$中所有有界子集的吸收集.

证明 由 B_0 定义,存在 $t_0(B_0)$,当 $t \geqslant t_0(B_0)$,有

$$S(t)B_0 \subseteq B_0$$

容易验证 B 满足命题的所有结果.

命题5.3 设 u_1, u_2 是(5.1)~(5.3)分别以 $u_1(0)$、$u_2(0) \in B$ 为始值的两个解.令 $w = u_1 - u_2$,如果

1. $|w(t)|_V^2 \leqslant k e^{\alpha t} |w(0)|_V^2 \quad (5.6)$

2. $\frac{d}{dt}\varphi(Q_N w) + c_0 \varphi(Q_N w) \leqslant c_1 \lambda_{N+1}^{-2\beta} |Q_N w|_V^2 \quad (5.7)$

则存在 t_* 使得 $S(t_*)$在 B 中 Lipschitz 连续且是收缩的.其中 $\varphi(Q_N w)$满足

$$|Q_N w(t)|_V^2 \leqslant k_0 \varphi(Q_N w) \leqslant k_1 |Q_N w(t)|_V^2 \tag{5.8}$$

$k_0, k_1, k, c_0, c_1, \alpha, \beta$ 是与 $w(t)$无关的常数,λ_{N+1}是 A 的第 $N+1$ 个特征值,N 满足

$$c_1 k_0 k (\alpha + c_0)^{-1} \lambda_{N+1}^{-2\beta} e^{2\alpha t_*} < \frac{1}{256} \tag{5.9}$$

t_* 满足

$$k_1 e^{-c_0 t_*} < \frac{1}{256} \tag{5.10}$$

证明 由(5.7),我们有

$$\begin{aligned} \varphi(Q_N w) \leqslant\ & \varphi(Q_N w(0)) e^{-c_0 t} \\ & + c_1 k \lambda_{N+1}^{-2\beta} e^{\alpha t} |Q_N w(0)|_V^2 e^{-c_0 t} \int_0^t e^{(\alpha + c_0)s} ds \\ \leqslant\ & k_0^{-1} k_1 |Q_N w(0)|_V^2 e^{-c_0 t} \\ & + c_1 k (c_0 + \alpha)^{-1} \lambda_{N+1}^{-2\beta} e^{2\alpha t} |Q_N w(0)|_V^2 \\ \leqslant\ & |w(0)|_V^2 [k_0^{-1} k_1 e^{-c_0 t} \\ & + c_1 k (\alpha + c_0)^{-1} \lambda_{N+1}^{-2\beta} e^{2\alpha t}] \end{aligned} \tag{5.11}$$

令 t_* 适当大使得

$$k_1 e^{-c_0 t_*} < \frac{1}{256}$$

然后选取 N 充分大使得

$$c_1 k_0 k(\alpha + c_0)^{-1} e^{2\alpha t_*} \lambda_{N+1}^{-2\beta} < \frac{1}{256}$$

则我们得到

$$k_0 \varphi(Q_N w) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 |w(0)|_V^2, \delta \in \left(0, \frac{1}{8}\right) \qquad (5.12)$$

然后由(5.8),

$$|Q_N w(t_*)|_V^2 \leqslant \frac{1}{128}|w(0)|_V^2 \qquad (5.13)$$

故得到当$|Q_N w(t_*)|_V^2 > |P_N w(t_*)|_V^2$时,有

$$\begin{aligned} |w(t_*)|_V^2 &= |P_N w(t_*)|_V^2 + |Q_N w(t_*)|_V^2 \\ &< 2|Q_N w(t_*)|_V^2 < \frac{1}{64}|w(0)|_V^2 \end{aligned}$$

又由(5.6)即得 Lipschitz 连续性.

由命题 5.1~5.3,我们得到:

定理5.4 设(5.1)~(5.3)满足命题 5.3 的条件且分别在 $D(A)$, V 中存在有界闭吸收集 B_0, B_1,则($S(t)$, B)容许有($D(A)$, V)型 IFS M,且

$$d_F(M) \leqslant 1 + N_0 \lg(1 + \sqrt{2}l/\delta)/\lg\frac{1}{\theta} \qquad (5.14)$$

$$\mathrm{dist}_V(S(t)B, M) \leqslant c_0 e^{-c_1 t} \qquad (5.15)$$

其中 $l = ke^{\alpha t_*}$, $\delta \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$, $4\delta < \theta < 1$, c_0, c_1 是常数, N_0 满足(5.9), t_* 满足(5.10).

利用上述结果我们研究非线性 Schrödinger 方程和弱耗散 KdV 方程

非线性 Schrödinger 方程:

$$i\frac{du}{dt} - Au + g(|u|^2)u + i\gamma u = f(x), (t, x) \in R_+ \times (0, l) \qquad (5.16)$$

$$u(0) = u_0 \tag{5.17}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$(\text{或 } u(x,t) = u(x+l,t), \forall t > 0, x \in R) \tag{5.18}$$

其中 $A = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $g(s) \in C^2(R_+)$,满足

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{h(s) - wG(s)}{s^3} \leqslant 0 \tag{5.19}$$

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{G_+(s)}{s^3} = 0 \tag{5.20}$$

$h(s) = sg(s)$, $G(s) = \int_0^s g(\tau)\mathrm{d}\tau$, $G_+(s) = \max\{0, G(s)\}$.

令

$$D(A) = H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l), V = H_0^1(0,l)$$

或者

$$D(A) = \{v \in H_{\mathrm{loc}}^2(R), v(x+l) = v(x), \forall x \in R\}$$

$$V = \{v \in H_{\mathrm{loc}}^1(R), v(x+l) = v(x), \forall x \in R\}$$

u 在 $D(A)$, V 中范数分别定义为

$$\| u \|_{D(A)} = [\,|u|_0^2 + l^2 |u_x|_0^2 + l^4 |u_{xx}|_0^2\,]^{1/2} \tag{5.21}$$

$$\| u \|_V = [\,|u|_0^2 + l^2 |u_x|_0^2\,]^{1/2}, \quad |\cdot|_0 \text{ 为 } L^2_{(0,l)} \text{ 范数} \tag{5.22}$$

下面的结果是已知的:

设 g 满足(5.19)~(5.20), $f \in L^2(0,l)$,则对(5.16)~(5.18),我们有如下结论:

1. 如果 $u_0 \in V(D(A))$,则存在唯一解 u, $u \in C(R_+, V) \cap L^\infty(R_+, V)$ $(u \in C(R_+, D(A)) \cap L^\infty(R_+, D(A)))$

2. 分别在 $D(A)$, V 中存在吸收集 B_0, B_1, $B_0 = \{u \in D(A), \| u \|_{D(A)} \leqslant \rho_{\infty,2}\}$, $B_1 = \{u \in V, \| u \|_V \leqslant \rho_{\infty,1}\}$.

从而存在紧正向不变集 B.

令 $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$, u_1, u_2 是(4.16)~(4.18)分别以 $u_1(0)$, $u_2(0)$为始值的两个解.则

$$i\frac{\partial\omega}{\partial t}-A\omega+g(|u_1|^2)u_1-g(|u_2|^2)u_2+i\gamma\omega=0 \tag{5.23}$$

利用

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\omega_x|_0^2=\operatorname{Im}(i\omega_t-A\omega,A\omega) \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\omega|_0^2=\operatorname{Im}(i\omega_t-A\omega,\omega) \tag{5.25}$$

我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\omega|_V^2=\operatorname{Im}(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1,\ \omega+l^2A\omega)-\gamma\|\omega\|_V^2 \tag{5.26}$$

注意到 $g(s)\in C^2(R_+)$,故

$$g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1=g(|\xi|^2)\omega+g'(|\xi|^2)\xi^2\bar{\omega}+g'(|\xi|^2)|\xi|^2\omega \tag{5.27}$$

其中 $\xi=\tau u_1+(1-\tau)u_2\in B,\tau\in(0,1)$.利用(5.27),我们有

$$\operatorname{Im}(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1,\omega)=\operatorname{Im}(g'(|\xi|^2)\xi^2\bar{\omega},\omega)$$

又因为 $|\xi|_{L^\infty}\leqslant\rho_{\infty,2}$;$|g'(|\xi|^2)|\leqslant c$,我们有

$$\operatorname{Im}(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1,\omega)\leqslant c\rho_{\infty,2}^2|\omega|_0^2 \tag{5.28}$$

又

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1,A\omega)\\&=\operatorname{Im}(4g'(|\xi|^2)\operatorname{Re}(\xi\bar{\xi}_x)\omega,\omega_x)\\&\quad+\operatorname{Im}(g'(|\xi|^2)\xi^2\bar{\omega}_x,\omega_x)+\operatorname{Im}(2g''(|\xi|^2)\operatorname{Re}(\xi\bar{\xi}_x)\bar{\omega},\omega_x)\\&\quad+\operatorname{Im}(2g'(|\xi|^2)\xi\xi_x\bar{\omega}+2g''(|\xi|^2)\operatorname{Re}(\xi\xi_x)|\xi|^2\omega,\omega_x)\end{aligned} \tag{5.29}$$

现在利用 $|\xi_x|_\infty\leqslant\|\xi_x\|^{1/2}|\xi|_0^{1/2}\leqslant\rho_{\infty,2}$ 和关于 g',g'' 的 L^∞ 估计,我们推得

$$\left|\operatorname{Im}(g(|u_2|^2)u_2-g(|u_1|^2)u_1,A\omega)\right|$$

$$\leqslant c_3 |\omega_x|_0^2 + c'_4 \int_0^l |\omega| |\omega_x| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant c_4 \|\omega\|_V^2 \tag{5.30}$$

结合(5.26),(5.28)和(5.30),我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\omega(t)\|_V^2 \leqslant c_6 \|\omega(t)\|_V^2 \tag{5.31}$$

于是

$$\|\omega(t)\|_V^2 \leqslant \mathrm{e}^{c_6 t} \|\omega(0)\|_V^2 \tag{5.32}$$

其中 c_6 仅与 $\gamma, \rho_{\infty,2}, g, g', g''$ 有关.

令

$$\varphi(\omega) = \int_0^l \{ |\omega_x|^2 - g(|\xi|^2)|\omega|^2 - 2g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})^2 \} \mathrm{d}x \tag{5.33}$$

利用 $|\xi|_\infty \leqslant \rho_{\infty,2}$;$\xi \in B, g, g' \leqslant c$,我们有当

$$\lambda_{N+1} \geqslant l^{-2} + 2c_0 + 4c_0\rho_{\infty,2}^2 \tag{5.34}$$

成立,则有

$$\|Q_N\omega(t)\|_V^2 \leqslant 2l^2\varphi(Q_N\omega) \leqslant 2c_2 l^2 \|Q_N\omega(t)\|_V^2 \tag{5.35}$$

其中 $c_2 = \max\{l^{-2}, c_0 + 2c_0\rho_{\infty,2}^2\}$.

用 $\gamma\bar{\omega}$ 乘(5.23)在$(0,l)$上积分且取实部,其次用 $-\bar{\omega}_t$ 乘(5.23)在$(0,l)$上积分且取实部,我们分别得到

$$\mathrm{Im}\int_0^l \gamma\bar{\omega}_t\omega \mathrm{d}x - \int_0^l \gamma |\omega_x|^2 \mathrm{d}x + \gamma\int_0^l g'(|\xi|^2)|\xi|^2|\omega|^2\mathrm{d}x + \gamma\int_0^l g(|\xi|^2)|\omega|^2\mathrm{d}x + \mathrm{Re}\int_0^l \gamma g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})^2\mathrm{d}x = 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^l |\omega_x|^2\mathrm{d}x - \int_0^l [2g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})^2 + g(|\xi|^2)|\omega|^2]\mathrm{d}x\right] + \gamma\mathrm{Im}\int_0^l \omega\bar{\omega}_t\mathrm{d}x = \gamma(t,\omega) \tag{5.37}$$

其中

$$\gamma(t,\omega)=-\frac{1}{2}\int_0^l\Big[|\omega|^2\frac{\partial}{\partial t}g(|\xi|^2)+\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})\frac{\partial}{\partial t}g'(|\xi|^2)$$

$$+2g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})\mathrm{Re}(\xi_t\bar{\omega})\Big]\mathrm{d}x \tag{5.38}$$

从(5.36),(5.37)推得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega)+\gamma|\omega_x|_0^2-R(t,\omega)=r(t,\omega) \tag{5.39}$$

其中

$$R(t,\omega)=\gamma\int_0^l g'(|\xi|^2)|\xi|^2|\omega|^2\mathrm{d}x+\gamma\int_0^l g(|\xi|^2)|\omega|^2\mathrm{d}x$$

$$+\gamma\mathrm{Re}\int_0^l g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})^2\mathrm{d}x \tag{5.40}$$

注意到 $\xi\in B$,故

$$|R(t,\omega)|\leqslant c(\rho_{\infty,2},\gamma)|\omega|_0^2 \tag{5.41}$$

回到(5.16),根据 $u\in B$, $f\in L^2(0,l)$, $u\in L^\infty(R_+,D(A))$,我们有 $u_t\in L^2(0,l)$和 $\xi_t\in L^2(0,l)$,即$|\xi_t|_0\leqslant c(\rho_{\infty,2};|f|_0)$,因此我们得到

$$\begin{aligned}|r(t,\omega)|&\leqslant c_1\int_0^l|\omega|^2|\xi_t|\mathrm{d}x\\&\leqslant c_1|\xi_t||\omega|_{L^4}^2\\&\leqslant c|\omega_x|_0^{1/2}|\omega|_0^{3/2}\\&\leqslant\frac{\gamma}{2}|\omega_x|_0^2+\frac{3}{4}c^{4/3}(2\gamma)^{-1/3}|\omega|_0^2\end{aligned} \tag{5.42}$$

将(5.41),(5.42)代入(5.39),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega)+\gamma|\omega_x|_0^2\leqslant c_3|\omega|_0^2 \tag{5.43}$$

利用

$$\left|\int_0^l g(|\xi|^2)|\omega|^2\mathrm{d}x+2\int_0^l g'(|\xi|^2)\mathrm{Re}(\xi\bar{\omega})^2\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant c_4|\omega|_0^2$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(Q_N\omega)+\gamma\varphi(Q_N\omega)\leqslant c_5\lambda_{N+1}^{-1}\|Q_N\omega\|_V^2 \quad (5.44)$$

其中 $c_5=c_3+c_4$, N 满足(5.35). 由定理 5.4, 有

定理 5.5 设 $f\in L^2(0,l)$, $u_0\in D(A)$, 则在条件(5.19), (5.20)下, 在 V 中存在$(S(t),B)$的 IFS M, 且

$$d_F(M)\leqslant c\max\{\sqrt{l^{-2}+2c_0+4c_0^2\rho_{\infty,2}^2},$$
$$16\mathrm{e}^{c_6t_*}c_5^{1/2}(c_5+\gamma)^{-1/2}\}+2$$
$$\mathrm{dist}_V(S(t)B,M)\leqslant c_0\mathrm{e}^{-c_1t} \quad (5.45)$$

其中 t_* 满足 $t_*\geqslant\gamma^{-1}\ln(512c_2l^2)$.

弱阻尼 KdV 方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u_{xxx}+uu_x+\gamma u=f(x)$$
$$(t,x)\in R_+\times(0,l) \quad (5.46)$$
$$u(0)=u_0 \quad (5.47)$$
$$u(x+l,t)=u(x,t) \quad (5.48)$$

空间 $D(A)$, V 中范数用(5.21), (5.22)表示.

下面的结果是已知的:

1. 如果 $u_0\in V$, 则存在(5.46)~(5.48)的解 $u\in C(R_+,V)\cap L^\infty(R_+,V)$, 且存在 $T(R)>0$, 使当 $t\geqslant T(R)$时,

$$\|u\|_V\leqslant\rho_{\infty,1}$$

2. 如果 $u_0\in D(A)$, $f\in D(A)$, 则存在解 $u\in C(R_+,D(A))\cap L^\infty(R_+,D(A))$且存在 $T_1(R)>0$ 使得当 $t\geqslant T_1(R)$, 有

$$\|u\|_{D(A)}\leqslant\rho_{\infty,2}$$

其中算子 $A=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\rho_{\infty,1}$, $\rho_{\infty,2}$是仅与 l,γ,f 有关的常数.

3. 如果 $f\in D(A)$, $u_0\in D(A)$, 则对由(5.46)~(5.48)定义的非线性半群 $S(t)$在 V 中有紧吸引子 $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$吸引 $D(A)$中任何

有界子集.

令

$$B_0 = \{u \in V, \| u \|_V \leqslant \rho_{\infty,1} \text{ 且 } \| u \|_{D(A)} \leqslant \rho_{\infty,2}\}$$

$$B = \overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T_1(\rho_{\infty,2})} S(t)B_0}$$

则 B 是 $S(t)$ 在 V 中紧的正向不变集. 且吸收 $D(A)$ 中任何有界子集. 同时由 B 的定义知,若 $u_0 \in B$,则对一切 $t \geqslant 0, S(t)u_0 \in B$.

记 $\omega(t) = u_1(t) - u_2(t)$, u_1, u_2 是(5.46)以 $u_1(0), u_2(0)$ 为始值的两个解,则

$$\omega_t + (\xi(t)\omega)_x + \omega_{xxx} + \gamma\omega = 0 \tag{5.49}$$

其中 $\xi(t) = \dfrac{u_1 + u_2}{2} \in B$;

用 $\omega - l^2\omega_{xx}$ 乘(5.46)且在 $(0, l)$ 上积分,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \omega \|_V^2 + \gamma \| \omega \|_V^2$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^l \{\xi_x(\omega^2 + 3l^2\omega_x^2) - 2l^2\xi_{xx}\omega\omega_x\}\mathrm{d}x \tag{5.50}$$

利用

$$|v|_\infty \leqslant |v|_0^{1/2}(2|v|_1 + l^{-1}|v|_0)^{1/2}$$

其中 $|v|_1^2 = \int_0^l |v_x|^2 \mathrm{d}x$, 有

$$\left|\int_0^l \xi_x(\omega^2 + 3l^2\omega_x^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant 3\| \omega \|_V^2 |\xi_x|_\infty$$

$$\leqslant c\rho_{\infty,2}\| \omega \|_V^2 \tag{5.51}$$

$$\left|\int_0^l l^2\xi_{xx}\omega\omega_x\mathrm{d}x\right| \leqslant c|\omega|_\infty |\xi_{xx}|_0 |\omega_x|_0$$

$$\leqslant c\| \xi \|_{D(A)} \| \omega \|_V^2$$

$$\leqslant c\rho_{\infty,2}\| \omega \|_V^2 \tag{5.52}$$

从(5.51),(5.52),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| \omega \|_V^2 + 2\gamma \| \omega \|_V^2 \leqslant c\rho_{\infty,2}\| \omega \|_V^2 \tag{5.53}$$

于是推得

$$\| \omega(t) \|_V^2 \leqslant \| \omega(0) \|_V^2 \exp[c_1 \rho_{\infty,2} t] \tag{5.54}$$

这表明 $S(t)$在 B 上 Lipschitz 连续.

记

$$\varphi(Q_N\omega) = \int_0^l \{ (Q_N\omega)^2 + l^2 (Q_N\omega_x)^2 - l^2 \xi(t) (Q_N\omega)^2 \} \mathrm{d}x \tag{5.55}$$

注意到

$$|\xi(t)|_\infty \leqslant \sqrt{2} l^{-1/2} \| \xi \|_V \leqslant \sqrt{2} l^{-1/2} \rho_{\infty,2}$$

我们得到

$$\varphi(Q_N\omega) \leqslant (1 + \sqrt{2}\rho_{\infty,2} l^{3/2}) \| Q_N\omega \|_V^2 \tag{5.56}$$

而当 N 适当大,使得

$$\lambda_{N+1} \geqslant 2\sqrt{2}\rho_{\infty,2} l^{-1/2} \tag{5.57}$$

我们就有

$$\varphi(Q_N\omega) \geqslant \frac{1}{2} \| Q_N\omega \|_V^2 \tag{5.58}$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| Q_N\omega \|_V^2 &\leqslant \varphi(Q_N\omega) \\ &\leqslant (1 + \sqrt{2}\rho_{\infty,2} l^{3/2}) \| Q_N\omega \|_V^2 \end{aligned} \tag{5.59}$$

将 $\omega(t)$分解为 $P_N\omega$ 和$Q_N\omega$,N 待定. 于是

$$P_N\omega_t + (\xi(t) P_N\omega)_x + (P_N\omega)_{xxx} + \gamma P_N\omega = 0 \tag{5.60}$$

$$Q_N\omega_t + (\xi(t) Q_N\omega)_x + (Q_N\omega)_{xxx} + \gamma Q_N\omega = 0 \tag{5.61}$$

用$2(Q_N\omega)_{xx} + 2\xi Q_N\omega$ 与(5.61)相乘且在$(0,l)$上积分,并且记 $\omega_1 = Q_N\omega$,利用分部积分,得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^l \{ \omega_{1x}^2 - \xi\omega_1^2 \} \mathrm{d}x &= -\int_0^l \xi_t \omega_1^2 \mathrm{d}x - 2\gamma \int_0^l \omega_{1x}^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + 2\gamma \int_0^l \xi\omega_1^2 \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.62}$$

用 $2\omega_1$ 与(5.61)相乘且在$(0,l)$上积分,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l \omega_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^l 2\xi\omega_1\omega_{1x}\mathrm{d}x - 2\gamma\int_0^l \omega_1^2\mathrm{d}x \tag{5.63}$$

用 l^2 乘(5.62)且与(5.63)相加,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega_1) + 2\gamma\varphi(\omega_1) = r(t) \tag{5.64}$$

其中

$$r(t) = -l^2\int_0^l \xi_t\omega_1^2\mathrm{d}x + 2\int_0^l \xi\omega_1\omega_{1x}\mathrm{d}x \tag{5.65}$$

又

$$\xi(t) = -\xi_{xxx} - \xi u_{1x} - u_2\xi_x + f - \gamma\xi$$

则

$$r(t) = \int_0^l l^2\omega_1^2(\xi_{xxx} + \xi u_{1x} + u_2\xi_x + \gamma\xi - f)\mathrm{d}x$$

$$+ 2\int_0^l \xi\omega_1\omega_{1x}\mathrm{d}x \tag{5.66}$$

逐项估计(5.66),不难得到

$$l^2\int_0^l \omega_1^2\xi_{xxx}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\gamma}{2}|\omega_1|_1^2 + c|\omega_1|_0^2 \tag{5.67}$$

$$\left|l^2\int_0^l \omega_1^2\xi u_{1x}\mathrm{d}x\right| \leqslant c_1|\omega_1|_0^2 \tag{5.68}$$

$$\left|\int_0^l l^2\omega_1^2\xi_x u_2\mathrm{d}x\right| \leqslant c_2|\omega_1|_0^2 \tag{5.69}$$

$$\left|\int_0^l l^2 f\omega_1^2\mathrm{d}x\right| \leqslant c_3|\omega_1|_0^2 \tag{5.70}$$

$$\left|\int_0^l \gamma l^2\omega_1^2\xi\mathrm{d}x\right| \leqslant c_4|\omega_1|_0^2 \tag{5.71}$$

$$\left|\int_0^l 2\xi\omega_1\omega_{1x}\mathrm{d}x\right| \leqslant c_5|\omega_1|_0^2 \tag{5.72}$$

综合(5.67)~(5.72),我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega_1) + 2\gamma\varphi(\omega_1) \leqslant c_6|\omega_1|_0^2 + \frac{\gamma}{2}|\omega_1|_1^2 \tag{5.73}$$

在 N 满足(5.57)条件下,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega_1) + \gamma\varphi(\omega_1) \leqslant c_6 |\omega_1|_0^2 \tag{5.74}$$

利用$|\omega_1|_0^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-1} |\omega_1|_1^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-1} \|\omega_1\|_V^2$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega_1) + \gamma\varphi(\omega_1) \leqslant c_6 \lambda_{N+1}^{-1} \|\omega_1\|_V^2 \tag{5.75}$$

由定理 5.4,选 t_* 使得

$$(1 + \sqrt{2}\rho_{\infty,2} l^{3/2})\exp[-\gamma t_*] \leqslant \frac{1}{8} \times \frac{1}{64} \tag{5.76}$$

再选取 N,使得

$$\lambda_{N+1} \geqslant \max\{512 c_6 (c_1 \rho_{\infty,2} + \gamma)^{-1} \exp[c_1 \rho_{\infty,2} t_*], \\ 2\sqrt{2}\rho_{\infty,2} l^{-1/2}\} \tag{5.77}$$

则 $S(t)$在 B 中收缩,从而存在$(S(t),B)$IFS. 这样就有:

定理5.6 设 $f \in D(A)$,$u_0 \in D(A)$,则由(5.46)~(5.48)所定义的非线性半群 $S(t)$在 V 中对于$(S(t),B)$存在惯性分形集 M,而且

$$d_F(M) \leqslant cN_0 + 1 \tag{5.78}$$

$$\mathrm{dist}_V(S(t)B, M) \leqslant c_0 \mathrm{e}^{-c_1 t}, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{5.79}$$

其中 N_0 由(5.77)确定,c, c_0, c_1 仅与 $f, \gamma, l, \rho_{\infty,2}$有关.

在§4 我们通过对定理 1.7 条件的改进解决了无界区域上反应扩散方程的指数吸引子存在性,这里我们应用§4 的结果研究非线性波方程,通过算子分解技巧,得到渐近紧算子半群的(E, E)型指数吸引子.

我们研究如下方程:

$$u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u + g(u) = f(x), (x,t) \in \Omega \times R_+ \tag{5.80}$$

$$u = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times R_+ \tag{5.81}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \tag{5.82}$$

记

$$G = \int_0^s g(r)\mathrm{d}r \tag{5.83}$$

设 g 满足如下条件：

(H₁) $\liminf\limits_{|s|\to\infty}\dfrac{G(s)}{s_2}\geqslant 0$ (5.84)

(H₂) 存在 $c_1>0$ 使得

$$\liminf_{|s|\to\infty}\frac{sg(s)-c_1G(s)}{s^2}\geqslant 0 \tag{5.85}$$

(H₃) $|g'(s)|\leqslant c_2(1+|s|^\gamma)$,

$$\begin{cases}0\leqslant\gamma<\infty & n=1,2\\ 0\leqslant\gamma<2 & n=3\\ \gamma=0 & n\geqslant 4\end{cases} \tag{5.86}$$

(H₄) $|g''(s)|\leqslant c_3(1+|s|^{\gamma-1}), n=1,2,3$ (5.87)

记 $A=-\Delta, V=H_0^1(\Omega), H=L^2(\Omega), E=V\times H, E_1=D(A)\times V, D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. 下面的结论是已知的：

定理5.7 设(H₁)～(H₃)成立，且 $f\in H$，则有

(1)由(5.80)～(5.82)定义的算子半群 $S(t)$ 在 E 空间存在整体紧吸引子 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 在 E_1 中有界，此外，在 E 空间存在有界闭的不变吸收集 B_0；

(2)存在 $\sigma_2>0$，使得对每个 $R>0$，

$$\sup_{\|\varphi\|_1\leqslant R}|g'(\varphi)|_{L(H,V_{-1+\sigma_2})}\leqslant c'_1(R)<\infty \tag{5.88}$$

其中 $\|v\|_{V_s}=(A^{s/2}v,A^{s/2}v)$，特别 $V_1=V$，范数记为 $\|\cdot\|_1$，H 中内积记为(,)，范数记为 $\|\cdot\|_0$.

(3) $S(t)$ 存在如下分解：

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t) \tag{5.89}$$

其中

$$\|S_1(t)\|_{L(E)}\leqslant c_0\exp\left(-\frac{\alpha_1 t}{2}\right), \forall t\geqslant 0 \tag{5.90}$$

$\alpha_1=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{\alpha}{2}\right), 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0=\min\left(\dfrac{\alpha}{4},\dfrac{\lambda_1}{2\alpha}\right), c_0=(1+\varepsilon\lambda_1^{-1/2})^2$，$\lambda_1$ 是 A 的第一特征值；$S_2(t)$ 在 E 空间是一致紧的.

设 $(u_0,u_1)\in E$ 且 $\|u_0\|_1^2+\|u_1\|_0^2\leqslant R^2$，则由定理 5.7 知

存在 E 中有界不变吸收集 $B_0=\{(u,v)\mid \|u\|_1^2+\|v\|_0^2\leqslant\rho_0^2\}$，使得 $S(t)B_0\subseteq B_0,\forall t\geqslant 0$，又由定理 5.7 的(3)知只要 $(u_0,u_1)\in B_0$，就存在 $t_1>0$，使得 $t\geqslant t_1$ 时有 $S_2(t)B_0\subseteq B_2$，B_2 在 E 中紧. 注意到

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{dist}_E(S(t)(u_0,u_1),B_2)\\
\leqslant&\ \|S(t)(u_0,u_1)-S_2(t)(u_0,u_1)\|_E\\
=&\ \|S_1(t)(u_0,u_1)\|_E\\
\leqslant&\ c_0\exp\left\{-\frac{\alpha_1 t}{2}\right\}\|(u_0,u_1)\|_E,\ \forall t\geqslant t_1
\end{aligned}
$$

c_0 与 (u_0,u_1) 无关. 令 $\{O_{1/2}(z_j)\}$ 是中心 $z_j\in B_2$，半径为 $\frac{1}{2}$ 的球对 B_2 的有限覆盖，令 $\{O_1(z_j)\}$ 是半径为 1 的球，如果 t' 充分大使得 $c_0\rho_0\exp\left\{-\frac{\alpha_1 t'}{2}\right\}\leqslant\frac{1}{2}$，则有 $S(t')B_0\subset\bigcup O_1(z_j)$，又令 $B=\overline{S(t')B_0}$，其中闭包在 E 中取，则 $B\subset B_0$ 也是不变的且为 $\{O_1(z_j)\}$ 有限覆盖，由 $S_1(t)B_0$ 的指数衰减性知 B 是渐近紧的.

现在我们证明：

命题5.8 设 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_4)$ 成立，则 $S(t)$ 在 E 中挤压.

证明 令 $u_1(t),u_2(t)$ 是(5.80)～(5.82)的两个解，记 $\omega(t)=u_1(t)-u_2(t)$，则 ω 满足

$$\omega''+\alpha\omega'+A\omega+g(u_1)-g(u_2)=0 \tag{5.91}$$

$$\omega(0)=\tilde{\omega}_0,\omega_t(0)=\tilde{\omega}_1 \tag{5.92}$$

改写(5.91)为

$$\omega''+\alpha\omega'+A\omega+g'(\xi)\omega=0 \tag{5.93}$$

$\xi=u_2+\tau\omega,0\leqslant\tau\leqslant 1$. 用 $\omega'+\rho\omega$ 与(5.93)取内积，ρ 待定，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega)+H(\omega)=0 \tag{5.94}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\varphi(\omega)=&\ \|\omega\|_1^2+\alpha\rho\|\omega\|_0^2+\|\omega'\|_0^2\\
&+2\rho(\omega,\omega')+(\omega,g'(\xi)\omega)
\end{aligned} \tag{5.95}
$$

$$H(\omega)=2\rho\|\omega\|_1^2+2(\alpha-\rho)\|\omega'\|_0^2$$
$$+2\rho(\omega,g'(\xi)\omega)-(\omega,g''(\xi)\xi_t\omega) \qquad (5.96)$$

我们证明:当 $\omega\in Q_NE$ 时,

(1)$\varphi(\omega)$为 Q_NE 中等价范,即存在 $c_1,c_2>0$,使得

$$c_1\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2\leqslant\varphi(\omega)$$
$$\leqslant c_2\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2 \qquad (5.97)$$

(2)存在 $\delta,\beta>0$,使得

$$H(\omega)-\delta\varphi(\omega)\geqslant -c\lambda_{N+1}^{-2\beta}\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2 \qquad (5.98)$$

其中 $c>0$ 与 ω 无关.

利用 $2\rho|(\omega,\omega')|\leqslant\frac{\alpha\rho}{2}\|\omega\|_0^2+\frac{2\rho}{\alpha}\|\omega'\|_0^2 \qquad (5.99)$

$$|(\omega,g'(\xi)\omega)|\leqslant c'(R)\|\omega\|_{V_{1-\sigma_2}}\|\omega\|_0$$
$$\leqslant c'(R)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}-\sigma_2}\|\omega\|_1^2 \qquad (5.100)$$

于是

$$\varphi(\omega)\geqslant(1-c'(R)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}-\sigma_2})\|\omega\|_1^2+\frac{\alpha\rho}{2}\|\omega\|_0^2$$
$$+\left(1-\frac{2\rho}{\alpha}\right)\|\omega'\|_0^2 \qquad (5.101)$$

取 $\rho\leqslant\rho_1=\frac{\alpha}{4}$,$N$ 适当大使得

$$\lambda_{N+1}^{1/2}\geqslant 2c'(R) \qquad (5.102)$$

则

$$\varphi(\omega)\geqslant\frac{1}{2}\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2 \qquad (5.103)$$

类似有

$$\varphi(\omega)\leqslant\left(\frac{3}{2}+\frac{\alpha^2}{8}\right)\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2 \qquad (5.104)$$

取 $c_1=\frac{1}{2},c_2=\frac{3}{2}+\frac{\alpha^2}{8}$,这就证明了(1)

$$H(\omega)-\delta\varphi(\omega)=(2\rho-\delta)\|\omega\|_1^2+(2\alpha-2\rho-\delta)\|\omega'\|_0^2$$

$$+(2\rho-\delta)(\omega,g'(\xi)\omega)-\alpha\rho\delta\|\omega\|_0^2$$
$$-2\rho\delta(\omega,\omega')-(\omega,g''(\xi)\xi_t\omega) \tag{5.105}$$

由(5.100)

$$(2\rho-\delta)\,|(\omega,g'(\xi)\omega)|\leqslant(2\rho-\delta)c'(R)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}-\sigma_2}\|\omega\|_1^2 \tag{5.106}$$

注意到(H_4)和

$$\|\xi_t\|_0\leqslant\|u_{1t}\|_0+\|u_{2t}\|_0\leqslant 2\rho_0 \tag{5.107}$$

于是

$$\left|\int\omega^2g''(\xi)\xi_t\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\rho_0(\|\omega\|_0^{1/2}\|\omega\|_1^{3/2}+\|\omega\|_{L^{12/4-\gamma}}^2\|\xi\|_{L^6}^{\gamma-1})$$
$$\leqslant(2\rho_0\lambda_{N+1}^{-1/4}+2\rho_0^{\gamma}\lambda_{N+1}^{-2\beta})\|\omega\|_1^2 \tag{5.108}$$

其中 $\beta=\dfrac{2-\gamma}{8}>0$.

从(5.106)~(5.108)得到

$$H(\omega)-\delta\varphi(\omega)\geqslant[2\rho-\delta-(2\rho-\delta)c(R)\lambda_{N+1}^{-\frac{1}{2}-\sigma_2}-2\rho_0\lambda_{N+1}^{-1/4}$$
$$-\alpha\rho\delta\lambda_{N+1}^{-1}-\rho^2\delta\lambda_{N+1}^{-1}]\|\omega\|_1^2$$
$$+(2\alpha-2\rho-2\delta)\|\omega'\|_0^2$$
$$-2\rho_0^{\gamma}\lambda_{N+1}^{-2\beta}\|\omega\|_1^2 \tag{5.109}$$

我们已利用

$$|2\rho\delta(\omega,\omega')|\leqslant\rho^2\delta\lambda_{N+1}^{-1}\|\omega\|_1^2+\delta\|\omega'\|_0^2$$

取 $\delta=\rho$,取 N 适当大使得:

$$\lambda_{N+1}^{1/4}\geqslant 2(c'(R)+2\rho_1+\rho_1^2),\quad(\rho\leqslant\rho_1) \tag{5.110}$$

则有

$$H(\omega)-\delta\varphi(\omega)\geqslant-2(\rho_0+\rho_0^{\gamma})\lambda_{N+1}^{-2\beta}\|\omega\|_1^2 \tag{5.111}$$

这里已利用 $0<\beta<\dfrac{1}{2}$;于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\omega)+\delta\varphi(\omega)\leqslant 2(\rho_0+\rho_0^{\gamma})\lambda_{N+1}^{-2\beta}\|(\omega,\omega')\|_{Q_NE}^2 \tag{5.112}$$

(2)获证,至此立刻得到 $S(t)$在 B 中挤压性,命题证毕.由命题

5.8 和定理 4.1 我们得到：

定理5.9 设(H_1)～(H_4)成立，$f \in H$，$(u_0, u_1) \in E$，则问题(5.80)～(5.82)定义的非线性半群 $S(t)$ 存在 $(S(t), B)$ 指数吸引子 M，M 是 (E, E) 型指数吸引子.

§6 吸引子分形结构初步

由于吸引子包含了"流"的长时间行为的信息，因此吸引子结构研究成为无穷维动力系统研究的主要领域之一，在对解算子 $S(t)$ 一系列限制条件下，Babin 和 Vishik 曾给出一类正则吸引子的构造，本节我们基于锥性质和覆盖技术，在惯性分形集的基础上给出一类方程吸引子的几何分形结构，同时给出吸引子的一个分形局部化指数逼近序列.

我们研究如下问题：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + R(u) = f, x \in \Omega = (0, l)^n, t \in R_+ \tag{6.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{6.2}$$

$$u(x, t) = u(x + le_i, t), \forall x \in R, t > 0, 1 \leqslant i \leqslant n \tag{6.3}$$

记 $H = L^2(\Omega)$，范数记为 $|\cdot|_0$；A 是 H 空间正自共轭无界算子且有紧逆算子，$\{\omega_j\}_1^\infty$ 是由 A 的特征向量构成的 H 空间正交基；其相应的特征值记为 $\{\lambda_j\}_1^\infty$；当 $j \to \infty$ 时，有 $\lambda_j \to +\infty$.

假设对于(6.1)～(6.3)满足如下条件：

1. 对于由(6.1)～(6.3)确定的非线性半群 $S(t)$ 存在整体紧吸引子 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A} \subset H$.

2. 在 H 中存在 $S(t)$ 的紧正向不变集 B，且存在 $m_0 > 0$，当 $\lambda_{m+1} \geqslant m_0$ 时，$S(t)$ 在 B 上 Lipschitz 连续同时是收缩的.

3. 存在 $\beta_1, \beta_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$，使得：

$$|(R(u_1) - R(u_2), v)| \leqslant c_0 |A^{\beta_1}(u_1 - u_2)|_0 \, |A^{\beta_2} v|_0,$$
$$v \in D(A^{\frac{1}{2}}), \quad u_1, u_2 \in B \tag{6.4}$$

命题6.1(锥性质)　设(6.1)～(6.3)满足条件(1)～(3),如果存在 t_0 使得

$$|p(t_0)|_0 = |q(t_0)|_0 \tag{6.5}$$

和 N 充分大,使得

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N \geqslant c_0\lambda_1^{\beta_1+\beta_2-2\beta}(\lambda_{N+1}^{2\beta} + \lambda_N^{2\beta}) \tag{6.6}$$

则我们有

$$|q(t)|_0 \leqslant |p(t)|_0, \quad \forall t \geqslant t_0 \tag{6.7}$$

其中 $p(t)=P(u_1(t)-u_2(t)), q(t)=Q(u_1(t)-u_2(t)), u_1, u_2$ 是(6.1)以 $u_1(0), u_2(0)\in B$ 为始值的两个解. $0\leqslant\beta\leqslant\min(\beta_1, \beta_2)$.

证明类似第一章定理 1.3 和第 4 章定理 2.1,从略.

命题 6.2　在假设条件(1)、(3)之下,如果 $|q(t)|_0 > |p(t)|_0, t\in R$,则对一切 $t_0\leqslant t$,只要

$$\lambda_{N+1}^{1-\beta_2} \geqslant c_0(\lambda_N^{\beta_1} + \lambda_{N+1}^{\beta_1}) \tag{6.8}$$

就有

$$|q(t)|_0^2 \leqslant |q(t_0)|^2 e^{-2\mu(t-t_0)} \tag{6.9}$$

其中 $\mu = \lambda_{N+1}^{\beta_2}(\lambda_{N+1}^{1-\beta_2} - c_0\lambda_N^{\beta_1} - c_0\lambda_{N+1}^{\beta_1})$.

证明　完全类似于第 4 章定理 2.1,从略.

命题6.3　在条件(1)～(3)之下,方程(6.1)的吸引子 $\mathscr{A}$,成立如下包含关系:

$$\mathscr{A}\subseteq \boldsymbol{\Gamma}, \mathscr{A}\subseteq \boldsymbol{E}^{(k)}, \quad \forall k \geqslant 1 \tag{6.10}$$

特别有 $\mathscr{A}\subseteq\Gamma_\infty$

其中 Γ 是满足锥性质:

$$|u-v|_0 \leqslant \sqrt{2}\,|P_N(u-v)|_0 \tag{6.11}$$

点的极大集,而 N 满足

$$N \geqslant \max\{N_0 \mid \lambda_{N_0+1} \geqslant m_0,$$

$$\lambda_{N_0+1} - \lambda_{N_0} \geqslant c_0\lambda_1^{\beta_1+\beta_2-2\beta}(\lambda_{N_0+1}^{2\beta} + \lambda_{N_0}^{2\beta}),$$

$$\lambda_{N_0+1}^{1-\beta_2} \geqslant c_0\left(\lambda_{N_0+1}^{\beta_1} + \lambda_{N_0}^{\beta_1}\right)\} \tag{6.12}$$

$E^{(k)}$同§1所定义,

$$\Gamma_\infty = \bigcup_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} S(t_*)E^{(k)}} \tag{6.13}$$

证明 吸引子 $\mathscr{A}$ 与 Γ 之间存在三种关系:

(1)$\mathscr{A} \subseteq \Gamma$

(2)$\mathscr{A} \cap \Gamma = \phi$

(3)$\mathscr{A} \cap \Gamma = \Gamma_1$

对于(1),(6.10)已被证明.对于(2),设 $u_1(t), u_2(t) \in \mathscr{A}$ 由设 $|q(t)|_0 > |p(t)|_0$,由命题6.2,我们有

$$|q(t)|_0^2 \leqslant e^{-2\mu(t-t_0)} |q(t_0)|_0^2$$

注意 $u_1(t), u_2(t) \in \mathscr{A}$,故它们对任何 $t_0 \leqslant t$,均属于 $\mathscr{A}$,因此 $|q(t)|_0^2 \leqslant 2ce^{-2\mu(t-t_0)}$,其中 c 仅与 B 有关,令 $t - t_0 \to +\infty$,得 $|q(t)|_0 = 0$,由于 $|p(t)|_0 < |q(t)|_0$,故有 $|p(t)|_0 = 0$,而这又与 $|p(t)|_0 < |q(t)|_0$ 矛盾,故(2)不可能发生.对于(3),记 $\Gamma^c = \mathscr{A} / \Gamma_1$,则 Γ^c 是 H 中开集,设 $u_1(t), u_2(t)$ 是 Γ^c 中任意两点,即 $h(t) = |q(t)|_0 - |p(t)|_0 > 0$,则必有对任何 $t_0 \leqslant t, t_0 \in R$,有 $u_1(t_0), u_2(t_0) \in \Gamma^c$;若不然,则 $h(t_0) \leqslant 0$ 对某 t_0 成立,由 $h(t)$ 关于 t 连续,必存在 $t_1: t_0 \leqslant t_1 \leqslant t$ 使得 $h(t_1) = 0$,但由命题6.1推得 $h(t) \leqslant 0$,这又矛盾于 $u_1(t), u_2(t) \notin \Gamma$,因此对任何 $t_0 \leqslant t$, $u_1(t_0), u_2(t_0) \in \Gamma^c$,但 $\Gamma^c \cap \Gamma = \phi$,如同(2)所证,$\Gamma^c = \phi$,即 $\mathscr{A} \subseteq \Gamma$,结合(1)~(3)得到 $\mathscr{A} \subseteq \Gamma$.

其次证明 $\mathscr{A} \subseteq E^{(k)}, \forall k \geqslant 1$.令

$$\mathscr{A}_{j_1 \cdots j_k} = \overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1 \cdots j_k}) \cap \mathscr{A}$$

由 $\mathscr{A} \subset S^k(t_*)B, \forall k \geqslant 1$,我们有 $S(t_*)\mathscr{A}_{j_1 \cdots j_k} \subseteq S(t_*)(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1 \cdots j_k}) \cap S^k(t_*)B)$,但是 $\mathscr{A}_{j_1 \cdots j_k} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \Gamma$,利用 $\mathscr{A}$ 正不变性知 $S(t_*)\mathscr{A}_{j_1 \cdots j_k} \subseteq \mathscr{A} \subseteq \Gamma$,由 $E_{k+1, j_1 \cdots j_k}$ 定义知,$S(t_*)\mathscr{A}_{j_1 \cdots j_k} \subseteq E_{k+1, j_1 \cdots j_k}$,注意到 $\bigcup_{j_i=1}^{k_0} \overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1 \cdots j_k})$ 是 $S^k(t_*)B$ 的有限覆盖 $i = 1$,

$\cdots,k$,故也是$\mathscr{A}$的有限覆盖,从而

$$\mathscr{A}=S(t_*)\mathscr{A}\subseteq S(t_*)\Big(\bigcup_{j_1=1\cdots j_k=1}^{k_0}(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1\cdots j_k})\cap\mathscr{A})\Big)$$

$$\subseteq\Big(\bigcup_{j_1=1\cdots j_k=1}^{k_0}S(t_*)(\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1\cdots j_k})\cap\mathscr{A})\Big)$$

$$=\bigcup_{j_i=1\cdots j_k=1}^{k_0}S(t_*)\mathscr{A}_{j_1\cdots j_k}$$

$$\subseteq\bigcup_{j_i=1\cdots j_k=1}^{k_0}E_{k+1,j_1\cdots j_k}$$

$$=E^{k+1},\quad\forall k\geqslant 1\tag{6.14}$$

故(6.18)获证,从而命题5.3被证明.

推论 在命题6.3同样假设条件下,$(S(t),B)$的IFS由下式给出:

$$M=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_*}S(t)\Gamma_\infty$$

定理6.4 (吸引子局部化和分形结构) 在条件(1)~(3)之下,$\{U_k\}_1^\infty$是$\mathscr{A}$的紧分形局部化指数逼近序列,特别有

$$\mathscr{A}=\bigcap_{k=1}^\infty U_k\tag{6.15}$$

而且

$$\mathrm{dist}(U_k,\mathscr{A})\leqslant c_1\mathrm{e}^{-c_2k}\tag{6.16}$$

其中$U_k=\bigcup_{j=k}^\infty E^{(k)}$,$c_1,c_2$是常数.

证明 令$U_k=\bigcup_{j=k}^\infty E^{(k)}$,由于$U_k$闭且对所有$k\geqslant1$,$U_k\subseteq B$,而$B$在$H$中紧,故$U_k$在$H$中紧($\forall k\geqslant1$),显然有$U_1\supseteq U_2\supseteq\cdots\supseteq U_k$,而$\mathscr{A}\subseteq E^{(k)}$,$\forall k\geqslant1$,推出$\{U_k\}_1^\infty$是$\mathscr{A}$在$H$中紧分形局部化逼近序列,设$u$是$U_k$中任一点,则至少存在一点$v\in\mathscr{A}$,而且$v\in E_{k,j_1\cdots j_k}$对某$j_1\cdots j_k$成立,于是

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(U_k,\mathscr{A})&\leqslant\mathrm{dist}(u,v)\\&\leqslant\overline{B}_{\theta^k R}(a_{j_1\cdots j_k})\text{的半径}\\&=\theta^k R=c_1\mathrm{e}^{-c_2k}\quad(\text{注意}\ 0<\theta<1)\end{aligned}$$

利用 H 空间完备性知 $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ 是非空、紧的分形集，由 U_k 定义知

$$\mathscr{A} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \tag{6.17}$$

另一方面，利用 B 的正不变性和 $E^{(k)} \subseteq S^k(t_*)B$，我们有

$$\begin{aligned} E^{(k+j)} &\subseteq S^{(k+j)}(t_*)B \\ &\subseteq S^{(k)}(t_*)B, \quad \forall j \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6.18}$$

又 $U_k \subseteq S^k(t_*)B$，且

$$\begin{aligned} \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(t_*)B \\ \subseteq \bigcap_k \left(\bigcup_{t \geqslant 0} S(t + kt_*)B\right) \\ = \bigcap_k \overline{\bigcup_{t \geqslant kt_*} S(t)B} = \mathscr{A} \end{aligned} \tag{6.19}$$

结合(6.17)，(6.19)得定理结论.

应用上述结果，我们看到一些非线性发展方程的吸引子在有限维空间具有紧分形结构.

A. Chaffee-Infante 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + \lambda(u^3 - u) = 0,\ x \in (0,1)^d,\ d = 1,2 \tag{6.20}$$

其中 $A = -\Delta, \lambda > 0$，

已知(6.28)在 H 中存在紧不变集 B：

$$B = \{u \in H,\ |u|_\infty \leqslant \sqrt{2}\} \tag{6.21}$$

而且满足条件(1)～(3)，其中 $m_0 = c_2|\Omega|\lambda^{d/2}$，

由于

$$|(R(u_1) - R(u_2), v)| \leqslant 7\lambda |u_1 - u_2|_0 |v|_0$$

则 $\beta_1 = \beta_2 = 0, c_0 = 7\lambda$，条件(6.6)，变为

$$\lambda_{N+1} - \lambda_N \geqslant 14\lambda \tag{6.22}$$

由此，当 $d = 1$ 时，在 N 维空间，(6.20)的吸引子具有分形结构，$N \geqslant \max\{\frac{1}{2\pi}\sqrt{14\lambda},\ c_2\sqrt{\lambda}\}$；而当 $d = 2$ 时，当 N 满足 $\beta \lg \lambda_N \geqslant \max\{14\lambda, c_2\lambda\}$，在 N 维空间吸引子也具有分形结构.

B. KS 方程

$$\frac{du}{dt} + u'''' + u'' - uu' = 0,\ x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),\ t > 0 \qquad (6.23)$$

在$\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$上，$u$ 是 l 周期的. $A = \frac{d^4}{dx^4}$.

已知

$$B = \{u \in H, |u|_0 \leqslant \rho_0, |u_x|_0 \leqslant \rho_1\}$$

是(6.23)周期初边值问题解算子 $S(t)$的紧不变集. 且满足条件(1)~(3). 其中

$$m_0 = c_4 l^2, c_4\ \text{是常数} \qquad (6.24)$$

由于

$$\begin{aligned} &|(R(u_1) - R(u_2), v)| \\ &\leqslant |A^{\frac{1}{4}}\omega|_0 |A^{\frac{1}{4}}v|_0 + \rho_0^{1/2}\rho_1^{1/2}|\omega|_0|A^{\frac{1}{4}}v|_0 \\ &\leqslant (1 + \rho_0^{1/2}\rho_1^{1/2}\lambda_1^{-\frac{1}{2}})|A^{\frac{1}{4}}\omega|_0|A^{\frac{1}{4}}v|_0 \qquad (6.25)\end{aligned}$$

其中 $\omega = u_1 - u_2$. 因此 $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}$，而 $c_0 = 1 + \lambda_1^{-1/2}\rho_0^{1/2}\rho_1^{1/2}$，条件(6.6)和(6.8)分别变为

$$\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}} - \lambda_N^{\frac{1}{2}} \geqslant c_0 \qquad (6.26)$$

$$\lambda_{N+1}^{\frac{3}{4}} \geqslant c_0(\lambda_{N+1}^{\frac{1}{4}} + \lambda_N^{\frac{1}{4}}) \qquad (6.27)$$

容易验证(6.27)包含在(6.26)中. 由(6.26)经过计算有 $N \geqslant \max\left\{c_0\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2, c_4 l^2\right\}$，故对于 KS 方程的吸引子 $\mathscr{A}$在 cl^2 维空间具有紧分形结构.

C. KSS 方程

$$\frac{du}{dt} + u'''' + [(2 - \delta(u')^2 u')]' - (u')^2 + \alpha u = 0 \qquad (6.28)$$

已知 $B = \{u \in H, |u'|_0 \leqslant \rho_1$ 和 $|u''|_0 \leqslant \rho_2\}$，是紧正向不变集，问题(6.28)，(6.2)，(6.3)满足条件(1)~(3)，且 $m_0 = c_6 \max\{\delta^2\rho_1^2\rho_2^2, 1, \rho_1^{8/5} + \delta^2\rho_1^2\rho_2^2\}$，由于

$$|(R(u_1) - R(u_2), v)| \leqslant [\alpha\lambda_1^{-1} + 2(1 + 3\delta\rho_1\rho_2 + \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_2^{\frac{1}{2}}$$

$$+6\delta\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_2^{\frac{1}{2}})]|A^{\frac{1}{4}}\omega|_0|A^{\frac{1}{4}}v|_0$$

因此

$$\beta_1=\beta_2=\frac{1}{4}$$

$$c_0=\alpha\lambda_1^{-1}+2(1+3\delta\rho_1\rho_2+\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_2^{\frac{1}{2}}+6\delta\lambda_1^{-\frac{1}{4}}\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_2^{\frac{1}{2}})$$

条件(6.6),(6.8)这时分别变为

$$\lambda_{N+1}^{\frac{1}{2}}-\lambda_N^{\frac{1}{2}}\geqslant c_0$$

即

$$N\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha l}{2\pi}+2+6\delta\rho_1\rho_2+\sqrt{\frac{2l\rho_1\rho_2}{2\pi}}+12\delta\rho_1^{\frac{1}{2}}\rho_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \tag{6.29}$$

和

$$\lambda_{N+1}^{\frac{3}{4}}\geqslant c_0(\lambda_{N+1}^{\frac{1}{4}}+\lambda_N^{\frac{1}{4}}) \tag{6.30}$$

于是类同例2,KSS方程吸引子$\mathscr{A}$在H空间具有N维的紧分形结构,其中N满足:

$$N\geqslant\max\left\{c\sqrt{\delta\rho_1\rho_2},c,c(\rho_1^{5/8}+\delta^2\rho_1^2\rho_2^2)^{\frac{1}{4}},\right.$$
$$\left.\frac{\alpha l}{4\pi}+1+3\delta\rho_1\rho_2+\left(\frac{l\rho_1\rho_2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}+6\delta\sqrt{\rho_1\rho_2}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\right\} \tag{6.31}$$

其中 $c=\frac{l}{2\pi}(2c_6)^{\frac{1}{4}}$.

注: Babin 和 Vishik 曾从稳定流形和不稳定流形的构造出发定义了一类正则吸引子,并在一系列限制条件下给出正则吸引子结构刻划,读者可参阅:A. V. Babin and M. I. Vishik, Regular attractors of semigroups and evolution equations, J. Math. Pures and Appl., 62(1983),441～491,也可参阅 Babin 和 Vishik 的专著"Attractors of Evolution Equations, North-Holland",1992,第5章第6节.

参 考 文 献

[1] Foias G., Sell, G. R. and Temam, R., Varites inertilles des equations differentielles dissipatives, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser I Math., 301, 1985, 139~142.

[2] Chow, S. N. and Lu, K., Invariant for flows in Banach spaces, J. Diff. Eqs., 74, 1988, 285~317.

[3] Mallet-Paret, J. and Sell, G. R., Inertial manifolds for reaction-diffusion equations in higher space dimensions, J. Amer. Math. Soc., 1, 1988, 805~866.

[4] Constantin, P., Foias, C., Nicolaenko, B. and Temam, R., Integral and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 70, Springer-Verlag, New York, 1988.

[5] Bernal, A. R., Inertial manifolds for dissipative semiflows in Banach spaces, Applicable Analysis, 37, 1990, 95~141.

[6] Demengel, F. and Ghidaglia, J. M., Inertial manifolds for partial differential evolution equations under time discretization: existence, convergence and applications, J. Math. Anal. and Appl., 155, 1991, 177~225.

[7] Debussche, A. and Temam, R., Inertial manifolds and their dimension, in Dynamical Systems, Theory and Applications (S. I. Anderson, A. E. Anderson and O. Ottason Eds) World Scientific Publishing Co. 1993.

[8] Debussche, A., Inertial manifolds and Sacker's equation, Diff. and Integral Eqs., 3, 1990, No. 3, 467~486.

[9] Fabes, E., Luskin, M. and Sell, G. R., Construction of inertial manifolds by elliptic regularization, J. Diff. Eqs., 89, 1991, No. 2, 335~381.

[10] Debussche, A. and Temam, R., Inertial manifolds and the slow manifolds in meteorology, Diff. and Integral Eqs., 4, 1991, No. 5, 897~931.

[11] Sell, G. R., You Y., Inertial manifolds: the nonself adjoint case, J. Diff. Eqs., 96, 1992, 203~255.

[12] Robinson, J. C., Inertial manifolds and the cone condition, Dyn. Syst. Appl., 2, 1993, 311~330.

[13] Conway, E., Hoff, D. and Smoller, J., Large time behavior of solution of nonlinear reaction diffusion equations, SIAM J. Appl. Math., 35, 1987, 1~16.

[14] Mane, R., Reduction of semilinear parabolic equations to finite dimensioal C^1 flows,

Geometry and Topology, Lect. Notes in Math., No. 597, Springer-Verlag, New York, 1977, 361~378.

[15] Mora, X., Finite dimensional attracting manifold for damped semilinear wave equations, Contr. to Nonlinear Partial Diff. Eqs. (I. Diaz and P. L. Lions Eds), Longmans Green, New York, 1983, 172~183.

[16] Foias, C., Nicolaenko, B., Sell G. R. and Temam, Inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension, J. Math. Pares Appl., 67, 1988, 197~226.

[17] Temam, R., Wang, X., Estimates on the lowest dimension of inertial manifolds for KS equation in the general case, Diff. Int. Equ., 7, 1994, No. 4, 1095~1108.

[18] Nicolaenko, B., Inertial manifolds for models of compressible gas dynamics, The Connection between Infite Dim. and Finite Dim. Dyn. Syst., Contemporary Math., Vol. 99, 1989, 165~180.

[19] Jolly, M. S., Explicit construction of an inertial manifold for a reaction diffusion equation,J. Diff. Eqs., 38, 1989, No. 2, 220~261.

[20] Taboada, M., Finite dimensional asymptotic behavior for the Swift-Hohenberg model of convection, Nonlinear Analysis, T. M. A., 1990, No. 1, 43~54.

[21] Bates P. W. and Zhang, S., Inertial manifolds and inertial sets for the phasefield equations, J. of Dy. Diff. Eq., 4, 1992, No. 2, 375~398.

[22] Kavak, M., Finite dimensional inertial forms for the 2D Navier-Stokes equations, Indiana Univ. Math. J., 41, 1992, 927~981.

[23] Foias, C., Manley, O., Temam, R., Sur l'interaction des petits et grands tourbillions dans less ecoulements turblents, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 305, 1987, 497~500.

[24] Jolly, M. S., Kevrekidis, I. G., Titi, E. S., Approximate inertial for the Kuramoto-Sivashinsky equation: analysis and computations, Phys. D, 44, 1990, 38~60.

[25] Marion, M., Approximate inertial manifolds for reaction diffusion equation in higher space dimension, J. Amer. Math. Soc., 1, 1988, 805~866.

[26] Marion, M., Approximate inertial manifolds for the patterns formation Cahn-Hilliard equation, Math. Modelling and Numerical Analysis, MIAN, 23, 1989, 463~480.

[27] Temam, R., Attractors for the Navier-Stokes equations, localization and approximation, J. Fuc. Sci. Tokyo. Sec. IA, 36, 1989, 629~647.

[28] Debussche, A., Marion, M., On the construction of families of approximate iner-

tial manifolds, J. Diff. Eqs., 100, 1, 1992, 173～201.

[29] Foias, C., Temam, R., Approximation of attractors by algebraic or analytic set, SIAM J. Math. Anal., 25, No. 5, 1994, 1269～1302.

[30] Marion, M., Temam, R., Nonlinear Galerkin methods, SIAM J. of Num. Anal., 26, No. 5, 1989, 1139～1157.

[31] Dubois, T., Jauberteau, F., Temam, R., Solution of the incompressible Navier-Stokes equations by the nonlinear Galerkin methods, J. Sci of Comput., 8, No. 2, 1993, 167～194.

[32] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., Ensembles inertials pour des equations d'evolution dissipatives, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 310, 1990, 559～562.

[33] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R., Exponential attractors for dissipative evolution equations, Masson, Paris and J. Wiley Collection Recherches en mathematiques Appliquoes, 1994.

[34] Jones, D. A., Titi, E. S., A remark on quasi-stationary approximate inertial manifolds for the Navier-Stokes equations, SIAM J. Math. Analysis, 25, No. 3, 1994, 894～914.

[35] Debussche, A., Dubois, T., Temam, R., The nonlinear Galerkin method: A multiscale method applied to the simulation of homogeneous turbulent flows, Theoret. Comput. Fluid Dynamicsm 7, 1995, 276～315.

[36] 赵怡，一类非线性双曲动力系统的近似弱惯性流形，中国科学 (A), Vol. 26, No. 7, 1996, 584～594.

[37] Constantin, P. and Foias, C., Navier-Stokes Equations, University of Chicago Press, Chicago, 1988.

[38] Constantin, P., Foias, C. and Temam, R., Attractors representing turbulent flows. Mem. Am. Math. Soc., 1985, 314.

[39] Foias, C., Nicolaenko, B., Sell. G. R. and Temam, R., Variètès inertièlles pour ièquation de kuramoto-sivaslinsky, C. R. Acad. Sci (1) 301, 1985, 285～288.

[40] Foias, C., Jolly, M. S., Kevrekidis, I. G., Sell, G. R. and Titi, E. S., On the Computation of inertial manifolds, Phys. Lett. A, 131, 1988, 433～436.

[41] Foias, C., Sell, G. R. and Titi, E. S., Exponential tracking and approximation of inertial manifolds for dissipative Nonlinear equations, J. of Dynam. and Diferen. Equ., Vol. 1, No. 2, 1989, 199～244.

[42] Marion, M. Attractors for reaction-diffusion equations: existence and estimate of

their dimension, Appl. Anal., 25. 1987, 101～147.

[43] Marion, M., Inertial manifolds associated to partly dissipative reaction-diffusion systems, J. Math. Anal. Appl., 172, 1995, 162～176.

[44] Mora, X., Finite dimensional attracting manifolds in reaction-diffusion equations, Contemp. Math., 17, 1989, 353～360.

[45] Guo Boling and Wang Bixiang, Approximation to the global attractor for the Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain, Beijing Math. 1 (1), 1995, 164～176.

[46] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Z. Sowej, 8, 1935, reproduced in 1965, 101～114.

[47] Zhou, Y., Guo, B., Tan, S., Existence and uniqueness of smooth solution for system of ferromagnetic chain, Science in China, 33A, 1990, 247～259.

[48] Guo, B., Global solutions and their large time behaviour for some nonlinear evolution equations, preprint IAPCM, 1994.

[49] Constantin, P., Foias, C., Navier-stokes Equations, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1988.

[50] Constantin, P., Foias, C., Temam, R., On the large time Galerkin approximation of the Navier-Stokes equations, SIAM J. Numer. Anal., 21, 1984, 615～634.

[51] Constantin, P., Foias, C., Temam, R., Attractors representing turbulent flows, Mem. Amer. Math. Soc., 53, No. 314, 1985.

[52] Foias, C., Manley, O., Temam, R., Sur l'interaction des petits et grands tourbillans dans les écoulements turbulents, C. R. Acad. Sci. Paris sér I 305, 1987, 497～500.

[53] Foias, C., Manley, O., Temam, R., Treve, Y. M., Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations, Phys. D, 9, 1983, 157～188.

[54] Foias, C., Saut, J. C., Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnares, Ann. Scula Norm. Sup. Pisa (4), 10, No. 1, 1983, 169～177.

[55] Foias, C., Temam, R., Some analytic and geometric properties of the solutions of the Navier-Stokes equations, J. Math. Pures Appl., 58, 1979, 339～368.

[56] Foias, C., Temam, R., Remarques sur les èquations de Navier-Stokes stationnaires et les phènomènes Successifs de bifurcation, Ann. Scula Norm. Sup. Pisa (4), 5, No. 1, 1978, 29～63.

[57] Heywood, J. G., Rannacher, R., Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes equations, Part Ⅱ, SIAM J. Numer. Anal., 23, 1986,

750～777.

[58] Temam, R., Navier-Stokes Equation, Theory and Numerical Analysis, 3rd ed., North-Holland, Amsterdam, 1984.

[59] Titi, E. S., On a criterion for locating stable stationary solutions to the Navier-Stokes equations, Nonlinear Anal. TMA 11, 1987, 1085～1102.

[60] Titi, E. S., A numerical criterion for locating stable time periodic solutions to the 2D Navier-Stokes equations, C. R. Acad. Sci. Paris, 312, 1991, 41-43.

[61] Titi, E. S., On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations, J. Math. Anal. Appl., V149, No 2, 1990, 540～556.

[62] Guo, B., Spectral method for solving two dimensional Newton-Bonssinesq equations, Acta Math. Appl. Sinica, 5 (2), 1989, 208～218.

[63] Guo, B., Nonlinear Galerkin methods for solving two dimensional Newton-Boussinesq equations, Chin. Ann. Math., 16B (3), 1995, 379～390.

[64] Guo, B., Wang, B., Approximate inertial manifolds to the Newton-Boussinesq equations, J. PDE, 9 (3), 1996, 237～250.

[65] Promislow, K., Time analyticity and Gevrey regularity for solutions of a class of dissipative partial differential equations, Nonl. Anal., TMA 6, 1991, 959～980.

[66] Liu, X., Gevrey class regularity and approximate inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equations. Physica D, 50, 1990, 135～151.

[67] Duan, J., Holmes, P., On the Cauchy problem of a generalized Ginzburg-Landau equation, Nonl. Anal. TMA, 22, 1994, 1033～1040.

[68] Duan, J., Holmes, P., Titi, E. S., Global existence theory for a generalized Ginzbury-Landau equation, Nonlinearity, 5, 1992, 1303～1314.

[69] Guo, B., Gao, H., Finite dimensional behaviour of generalized Ginzburg-Landau equation, Progress in Natural Sciences 4, 1994, 423～434.

[70] Doering, C. R., Gibbon, J. D., Levermore, C. D., Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation, Physica D, 71, 1994, 285～318.

[71] Guo, B., Wang, B., Approximation to the global attractor for a nonlinear Schrödinger equation, Appl, Math. JCU 11B, 1996, 125～136.

[72] Guo, B., Wang, B., Finite dimensional behaviour for the derivative Ginzburg-Landan equation in two spatial dimensions, Phys. D, 89, 1995, 83～90.

[73] Guo, B., Wang, B., Gevrey regularity and Approximate inertial manifolds for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions, Discrete and continuous dynamical system, 13 (4), 1996, 455～466.

[74] Ghidaglia, J. M., Weakly damped forced Korteweg-de-Vries equations behave as a finite dimensional dynamical System in the long time, J. Diff. Eq., 74, 1988,

369～390.

[75] Dai Zheng de, Wang Qi, Qu Chaochun, The approximate inertial manifolds for weakly damped forced KdV equation, J. of Math. Study, 16 (4), 1995, 1～9.

[76] Fabes, E., Luskin, M., Sell, G., Construction of inertial manifolds by elliptic regularization, J. Diff. Eq., 89, 1991, 355～389.

[77] Marion, M., Temam, R., Nonlinear Galerkin methods: The finite elements case, Numer. Math., 57, 1990, 205～226.

[78] Gottieb, D., Orszag, S. A. Numerical analysis of spectral methods, SIAM, philadelphia, PA, 1977.

[79] Temam, R., Stability analysis of the Nonlinear Galerkin methods, Math. of Comput, Vol. 57, No. 196, 1991, 477～505.

[80] Ciarlet, P. G., The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[81] Jauberteau, F., Rosier, C., Temam, R., The nonlinear Galerkin method in Computational fluid dynamics, Appl. Numer. Math., 6, 1989/90, 361～370.

[82] Temam, R., Inertial manifolds and multigrid methods, SIAM J. Math. Anal., 21, 1990, 154～178.

[83] Jauberteau, F., Rosier, C., Temam, R., A nonlinear Galerkin method for the Navier-Stokes equations. Comput. Methods Appl. Mech. Energ., 80, 1990, 245～260.

[84] Foias, C., Jolly, M., Kevrikidis, I., Sell, G., Titi, E., On the computation of inertial manifolds, Phys. Lett. A, 131, 1988, 433～436.

[85] Temam, R., Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis, SIAM, Philadelphia, 1983.

[86] Yserentant, H., On the multi-Level spliting of finite element spaces, Numer. Math., 49, 1986, 379～412.

[87] Debussche, A., Temam, R., Convergent families of approximate inertial manifolds, J. Math. Pures Appl. Vol. 73, 1994, 489～522.

[88] Bernal, A. R., Inertial manifolds for dissipative semiflows in Banach spaces, Applicable Analysis, 37, 1990, 95～141.

[89] Chow, S. N., Lu, K., Sell, G. R., Smoothness of inertial manifolds, J. Math. Anal. Appl., 169, 1992, 283～321.

[90] Constantin, P., Foias, C., Nicolaenko, B., Temam, R., Spectral barriers and inertial manifolds for dissipative partial differential equations, J. Dynamics Differential Eqs., 1, 1989, 45～73.

[91] Jones, D. A., Titi, E. S., C^1 Approximations of inertial manifolds for dissipa-

tive Nonlinear equations, J. of Diff. Eq. 94, 1996, 485~502.

[92] Demengel, F., Ghidaglia, J. M., Some remarks on the smoothness of inertial manifolds, Nonlinear Analysis-TMA, 16, 1991, 79~87.

[93] Devulder, C., Marion, M., A class of numerical algorithms for large time integration: the nonlinear Galerkin methods, SIAM, J. Num. Anal., 29, 1992, 462~483.

[94] Jones, D. A., Stuart, A. M., Attractive invariant manifolds under approximation part I. inertial manifolds, J. Diff. Eq., 123, No. 2, 1995, 588~637.

[95] Pliss, V. A., Sell, G. R., Perturbations of attractors of differential equations, J. Diff. Eq., 92, 1991, 100~124.

[96] Robinson, J. C., Inertial manifolds and the cone condition, Georgia Institute of Technology preprint, No. 18, 1996.

[97] Babin, A. V., Vishik, M. I., Regular attractors of Semigroups and evolution equations, J. Math. pures Appl., 62, 1983, 441~491.

[98] Chaffee, N., Infante, E. T., A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. Applicable Anal., 4, 1974, 17~37.

[99] Eden, A., Rakotoson, J. M., Exponential attractors for some doubly Nonlinear parabolic equations, J. Math, Anal. Appl., 185, No. 2, 1994, 321~339.

[100] Eden, A., Rakotoson, J. M., Inertial sets for dissipative equations, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 310, No. 7, 1990, 559~562.

[101] Eden, A., Michaux, B., Rakotoson, J. M., Semi-discretized nonlinear evolution equations as discrete dynamical Systems and error analysis, Indiana. Univ. Math. J., 39, No. 3, 1990, 737~783.

[102] Eden, A., Milani, A. J., On the convergence of attractors and exponential attractors for singularly perturbed hyperbolic equtions, Turkish J. Math., 19, No. 1, 1995, 102~117.

[103] Eden, A., Milani, A. J., Nicolaenko. B., Finite dimensional exponential attractors for semilinear wave equations with demping, J. Math. Anal. Appl., 169, No. 2, 1992, 408~419.

[104] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B., She, Z. S., Exponential attractors and their relevance to fluid mechanics Systems, Phys. D, 63, No. 3~4, 1993, 350~360.

[105] Falconer, K. J., Fractal geometry: mathematical foundations and applications, John Wiley & Sons, 1990.

[106] Farmer, J. D., Ott, E., Yorke, J. A., The dimension of chaotic attractors, Physica 7D 1983, 153~180.

[107] Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture Notes in Math., V840, Springer-Verlag, New York, 1981.
[108] Nicolaenko, B., Scheurer, B., Temam, R., Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: Nonlinear stability and attractors, Physica 16D, 1985, 155~183.
[109] Dai Zhengde, The fractal structure and fractal localization for Chaffee-Infante equation. ICNEPDE'94, 1994, 47~55.
[110] Dai Zhengde, The fractal structure of attractor for Kss equations, J. of Yunnan Univ., 17, 1997, 13~24.
[111] 戴正德，吸引子分形结构与非线性发展方程，中国期刊文摘快报，No. 2, 1996.
[112] Dai Zhengde, Guo Boling and Gao Hongjun, The inertial fractal sets for nonlinear Schrödinger equations, J. of PDE, 8 (1), 1995, 73~81.
[113] Dai Zhengde, Zhu Zhiwei, The inertial fractal sets for weakly damped forced Korteweg-de Vries equations, Appl. Math. & Mech., 16 (1), 1995, 37~45.
[114] Dai Zhengde, Qu Chaochun, The inertial sets of equations for the flow and magnetic field within the earth, Acta. Math. Scientia, 16 (supp.) 1996, 143~152.
[115] Dai Zhengde, Guo Boling, The inertial sets for dissipative zakharov System, Acta. Math. Appl. Sinica, 20 (3) 1997, 214~226.
[116] Dai Zhengde, Guo Boling, Exponential attractors of the strongly damped nonlinear wave equations, Recent Advances in Diff. Eq., Addison Wesley Longman Limited U. K., 1998, 149~159.
[117] Dai Zhengde. Ma Dachai, Exponential attractors of nonlinear wave equations. Chinese Sci. Bull., 43 (16), 1998, 1331~1335.
[118] Dai Zhengde, Yang Hanchun, The fractal structure of attractors for FH equation. Acta. Math. Appl. Sinica 14 (4), 1998, 396~403.
[119] Babin A. V. and Nicolaenko, B., Exponential attractors of reaction-diffusion Systems in an unbounded domain., J. of Dyn. and diff. Equ., 7 (4), 1995, 567~590.
[120] Babin A. V. and Vishik. M. I., Attractors of partial differential equations in an unbounded domain, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 116A, 221~243, 1990.
[121] 高洪俊，郭柏灵，一维广义 Ginzburg-Landan 方程的有限维惯性形式，中国科学，25 (12), 1995, 1233~1247.
[122] Guo Boling, Inertial manifolds for the generalized Kuramoto-Sivashinsky type equation, J. Math. Study, 28 (3), 1995, 50~62.
[123] Guo Boling, Existence of the inertial manifolds for generalized Kuramoto-Sivashin-

sky equation, J. Math. Study, 29 (1), 1996, 38~51.

[124] Guo Boling, Chen Jingdong, Fully discrete nonlinear Galerkin method for two dimensional Newton-Boussinesq equations, Chin. Ann. of Math, 16B, No. 3, 1995, 379~390.

